

ELASTOPLASTIČNA ANALIZA PILOTNIH STEN

THE ELASTOPLASTIC ANALYSIS OF SHEET PILE WALLS

JANKO LOGAR, asist. mag., Katedra za mehaniko tal z laboratorijem, FAGG
BOŠTJAN PULKO, asist., dipl.gradb. inž., Katedra za mehaniko tal z laboratorijem, FAGG

POVZETEK: Prikazane so teoretične osnove napetostno-deformacijske analize geotehničnih objektov s posebnim poudarkom na analizi izkopov - bodisi nezavarovanih ali pa zavarovanih s pilotnimi stenami. Analiza je izvršena po metodi končnih elementov z upoštevanjem preprostih elasto-plastičnih konstitucijskih zakonov (Drucker-Prager, Mohr-Coulomb). Rezultati preprostega računskega primera ilustrirajo osnovne možnosti pripravljene računalniškega programa.

SUMMARY: The theoretical background for stress-strain analysis of geotechnical problems is presented with special regard to the analysis of excavation in elastoplastic soils. Excavation may be supported by a sheet pile wall. The analysis is conducted by the finite element method, and simple elastoplastic constitutive relations for soils are employed (Drucker-Prager, Mohr-Coulomb). The basic capabilities of the elaborated computer program are presented by the results of a simple test case.

UVOD

Uporaba pilotnih sten za zaščito izkopov, ukopov ali plazovitih pobočij je razmeroma učinkovita in pogosta, projektiranje takšnih konstrukcij pa zahtevno, saj z upoštevanjem klasičnih teorij za določitev zemeljskih pritiskov ne moremo zajeti vpliva interakcije med zemljino in podporno konstrukcijo na velikost in razporeditev zemeljskih pritiskov. Poleg tega uporaba klasičnih metod, ki so se uveljavile v inženirski praksi, ne omogoča analize deformacijskega stanja in napovedi pomikov podporne konstrukcije in vpliva novogradnje na obstoječe objekte.

Metoda končnih elementov, ki omogoča napetostno-deformacijsko analizo takšnih konstrukcij ob upoštevanju nelinearnih odnosov med deformacijami in napetostmi, pri nas še ni prodrla v inženirsko prakso. Vzrokov za to je gotovo več: programi za tovrstne analize so dragi in težje dostopni, priprava podatkov in interpretacija rezultatov je zahtevnejša, poleg tega je za analizo po MKE potrebna določena mera izkušenj. Če se znotraj teh splošnih ugotovitev zadržimo pri podatkih, ki so iz strokovnega vidika najpomembnejši, hitro ugotovimo, da tovrstni komercialni programi omogočajo uporabo cele vrste različnih konstitucijskih modelov različnih avtorjev. Nelinearne konstitucijske zveze zahtevajo poznavanje manjšega ali večjega števila parametrov, ki jih je potrebno določiti z laboratorijskimi in terenskimi preizkusi. Namen prispevka je prikazati teoretične osnove elasto-plastične analize napetostnega in deformacijskega stanja pilotnih sten ob upoštevanju relativno preprostega Mohr-Coulombovega ali Drucker-Pragerjevega konstitucijskega modela. Čeprav sta navedena modela najpreprostejša kar jih uporabljamo v gomehaniki, sta zelo priljubljena zaradi majhnega števila parametrov, ki jih je mogoče določiti iz klasičnih laboratorijskih ali terenskih raziskav zemljin, in ker kljub temu dajejo zadovoljive rezultate.

Za analizo pilotnih sten je bilo potrebno v računalniški program, ki omogoča elasto-plastično analizo ravninskih deformacijskih stanj

po metodi končnih elementov, vgraditi še linijske elemente za modeliranje pilotne stene oziroma sidro in posebne vzdolžne kontaktne elemente, ki omogočajo simulacijo zdrsa ali razpoke na kontaktu pilotne stene in zemljine.

ELASTOPLASTIČNI KONSTITUCIJSKI MODELI

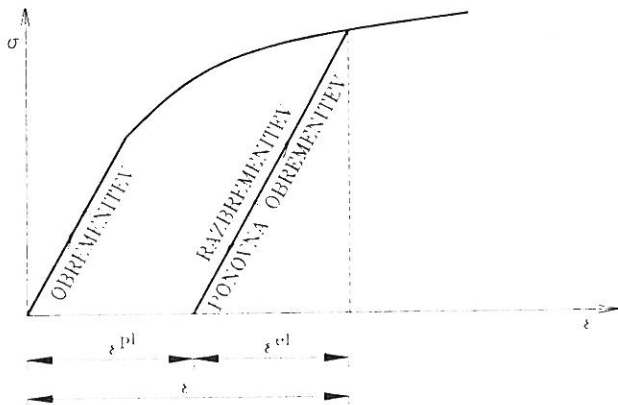
V geotehniko so se izmed nelinearnih konstitucijskih zvez najbolj uveljavili elasto-plastični modeli. Osnovne prednosti teh modelov pred nelinearnimi elastičnimi modeli so predvsem v preprosti razmejitvi med obremenitvijo in razbremenitvijo, kar je zlasti pomembno pri konstrukcijah, kot so pilotne stene, okrog katerih se del zemljine razbremenjuje (aktivno stanje), del pa obremenjuje (pasivno stanje). Poleg tega preprosti elasto-plastični modeli dobro opišejo obnašanje zemljin, kljub temu, da jih definira relativno malo parametrov, ki jih je mogoče določiti iz standardnih preiskav.

Za zemljine, pa tudi za mnoge druge snovi velja, da se pri dovolj majhnih napetostih obnašajo kot linearna elastična snov. Pri linearno elastični snovi je napetostno stanje enolično določeno z deformacijskim stanjem. Če tako snov obremenimo, nato pa čez čas razbremenimo, se napetostno in deformacijsko stanje povrne v izhodiščno stanje. Pri elastični snovi so torej deformacije povratne.

Kadar so pri zemljinah napetosti dovolj velike, postanejo zveze med napetostmi in deformacijami nelinearne. Če tako obremenjeno snov razbremenimo, se deformacije ne povrnejo v celoti v izhodiščno stanje. Del deformacij je povraten (elastičen), del pa nepovraten (plastičen). Tenzor deformacij torej lahko razstavimo na elastični in plastični del (slika 1):

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^{pl} \quad (1)$$

(Pri viskozni zemljini imenujemo nepovraten del deformacij viskoplastične deformacije, vendar se bomo v tem članku omejili na obravnavanje neviskoznih zemljin.)



Slika 1. Deformacijo sestavlja povraten in nepovraten del

Vsi elastoplastični modeli temeljijo na osnovnih konceptih inkrementalne teorije plastičnosti:

- obstoju pogoja (funkcije) plastičnega tečenja F ,
- funkciji plastičnega potenciala Q in
- zakonu utrjevanja (ali mehčanja).

Pogoj plastičnega tečenja

Pogoj, ki določa prestop iz elastičnega v plastično stanje imenujemo pogoj plastičnega tečenja. Pogoj plastičnega tečenja matematično podamo v obliki funkcije:

$$F = f(\sigma_{ij}) - k(\kappa) = 0 \quad (2)$$

Enačbo (2) si lahko predstavljamo kot sklenjeno ploskev v 6 dimenzionalnem prostoru napetosti in jo imenujemo tudi ploskev tečenja. Napetostna točka, ki podaja lego napetostnega stanja v napetostnem prostoru, je lahko bodisi v notranjosti te napetostne ploskve ali na njeni površini, ne more pa se nahajati izven ploskve tečenja.

Prirastek obtežbe povzroči spremembo napetostnega stanja v telesu. Ta sprememba lahko pomeni obremenitev ali razbremenitev. Obremenitev nastopi, ko je

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad (3)$$

razbremenitev pa predstavlja pogoj

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (4)$$

Material se obnaša elastično, če leži napetostna točka znotraj ploskve tečenja ali pa če leži napetostna točka na ploskvi tečenja in prirastek obtežbe povzroči razbremenitev. Matematično to zapišemo:

$$F < 0 \text{ ali } F = 0 \text{ in } dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (5)$$

Plastično se obnaša material, ko je $F = 0$. Ločimo dva primera: obremenitev

$$F = 0 \text{ in } dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad (6)$$

in poseben primer, ko se napetostno stanje spremeni tako, da se ohrani na ploskvi tečenja in ne povroči spremembe plastičnih deformacij. Pravimo, da gre za nevtralno obremenitev, matematični pogoj pa se glasi:

$$F = 0 \text{ in } dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (7)$$

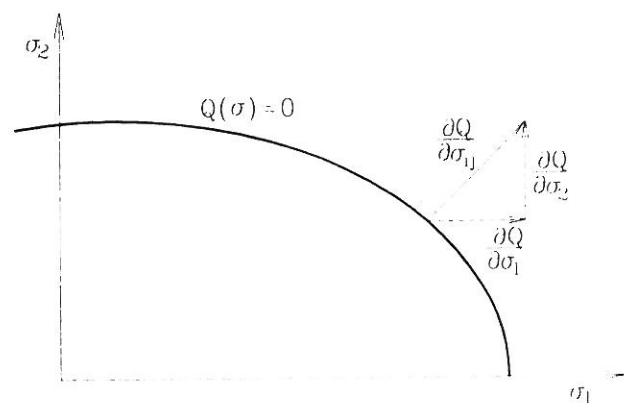
Funkcija plastičnega potenciala

Elastični del prirastka deformacij je s prirastkom napetosti povezan preko znane zveze:

$$d\varepsilon_{ij}^{el} = C_{ijkl} d\sigma_{kl} \quad (8)$$

Funkcijo, ki določa velikost in smer plastičnih deformacij v odvisnosti od napetostnega stanja, imenujemo plastični potencial Q :

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9)$$



Slika 2. Ploskev plastičnega potenciala in prirastek plastičnih deformacij

Vidimo, da je smer prirastka plastičnih deformacij ortogonalna na ploskev plastičnega potenciala (slika 2). Celoten prirastek deformacij je torej iz (1), (8) in (9):

$$d\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} d\sigma_{kl} + d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (10)$$

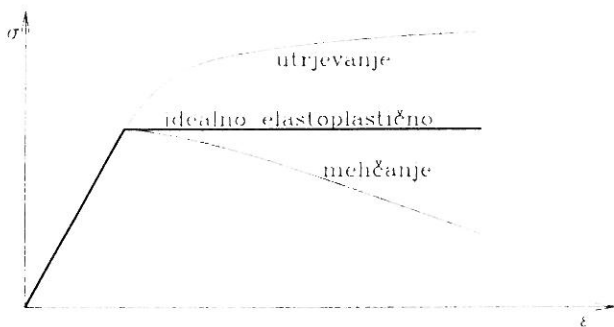
V teoriji plastičnosti pogosto uporabljamo modele, pri katerih za funkcijo plastičnega potenciala uporabimo kar pogoj plastičnega tečenja, torej $Q = F$. V tem primeru govorimo o asociativnih elastoplastičnih modelih, sicer pa ($Q \neq F$) o neasociativnih. Pri tem je pomembno poudariti, da uporaba neasociativnih elastoplastičnih modelov privede do nesimetrične konstitucijske matrike in s tem do povečane potrebe po računalniškem spominu in do povečanja računskega časa.

Zakon utrjevanja

Modele brez upoštevanja utrjevanja (mehčanja) imenujemo idealne elastoplastične modele. Tipičen diagram $\sigma - \varepsilon$ takega materiala je narisano z odebeljeno črto na sliki 3. Ploskev plastičnega tečenja za idealno elastoplastičen material ima obliko:

$$F = f(\sigma_{ij}) - k, \quad (k = konst) \quad (11)$$

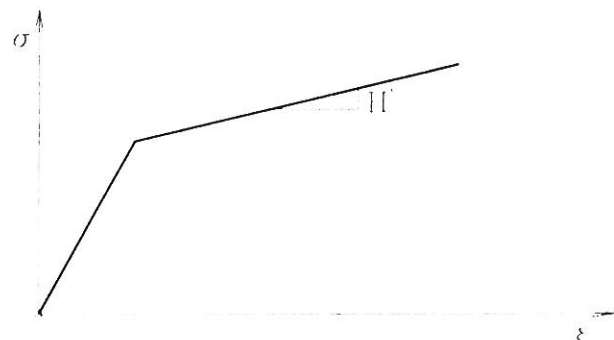
Na isti sliki sta prikazana še $\sigma - \varepsilon$ diagrama materiala z utrjevanjem in mehčanjem.



Slika 3. $\sigma - \varepsilon$ diagrami idealno elastoplastičnega materiala in materiala z utrjevanjem ter mehčanjem

Zakon utrjevanja $k = k(\kappa)$ pove, kako se ploskev plastičnega tečenja F spreminja glede na deformacijsko in napetostno stanje. κ je parameter utrjevanja. Najpogosteje uporabljamo kot parameter utrjevanja celotno plastično deformacijo ε^{pl} ali celotno plastično delo Ω^{pl} .

Preprost model utrjevanja, predstavljen z bilinearnim $\sigma - \varepsilon$ diagramom na sliki 4, je pogosto zadovoljiv približek za analizo številnih geotehničnih problemov.



Slika 4. Preprost model snovi z utrjevanjem

Širša razprava o zakonih utrjevanja presega zastavljen okvir članka Bralcu so o tem na voljo številni (tuji) teksti.

Tangentni konstitucijski zakon

Tangentni konstitucijski zakon povezuje prirastke napetosti σ_{ij} s prirastki deformacij ε_{kl} :

$$d\sigma_{ij} = D'_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (12)$$

Pri določitvi tangentne konstitucijske matrike smo upoštevali tri temeljne pogoje:

1. Dekompozicija prirastkov deformacij: $d\varepsilon = d\varepsilon^{el} + d\varepsilon^{pl}$
2. Hookov zakon: $d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^{el}$
3. Pogoj konsistence:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = 0; \quad dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right) d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial \kappa} \right) d\kappa = 0$$

Ob upoštevanju gornjih pogojev lahko zapišemo celotno shemo v matrični obliki:

- dekompozicija prirastkov deformacij

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^{el}\} + \{d\varepsilon^{pl}\}, \quad (13)$$

- elastični konstitucijski zakon

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon^{el}\}, \quad (14)$$

- plastični potencial

$$\{d\varepsilon^{pl}\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} \right\} = d\lambda \{b\}. \quad (15)$$

- plastični pogoj tečenja

$$F = F(\{\sigma\}, \kappa) = 0. \quad (16)$$

- pogoj konsistence

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T \{d\sigma\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \kappa} \right\}^T d\kappa = 0. \quad (17)$$

Ob upoštevanju enačb (13), (14) in (15) lahko zapišemo

$$\{d\sigma\} = [D](\{d\varepsilon\} - d\lambda\{b\}). \quad (18)$$

Po uvedbi oznak

$$\{a\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T \quad (19)$$

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa \quad (20)$$

se pogoj konsistence glasi:

$$dF = \{a\}^T \{d\sigma\} - A d\lambda = 0. \quad (21)$$

Izraz A predstavlja funkcijo utrjevanja. Vrednost je odvisna od deformacijskega in napetostnega stanja ter parametra utrjevanja. V primeru, da uporabljamo idealno elastoplastičen material, funkcija F ni odvisna od plastičnih deformacij in je njena vrednost nič ($A = 0$). V primeru bilinearnega diagrama s slike 4 pa je vrednost A enaka modulu (naklonu) H' .

Iz enačbe (17) izrazimo faktor $d\lambda$

$$d\lambda = \left(\frac{\{a\}^T [D] \{d\varepsilon\}}{A + \{a\}^T [D] \{b\}} \right). \quad (22)$$

Če rešitev za $d\lambda$ vstavimo v enačbo (18) sledi:

$$\{d\sigma\} = \left[[D] - \frac{[D] \{b\} \{a\}^T [D]}{A + \{a\}^T [D] \{b\}} \right] \{d\varepsilon\} = [D^{*p}] \{d\varepsilon\} \quad (23)$$

oziroma

$$[D^{*p}] = \left[[D] - \frac{[D] \{b\} \{a\}^T [D]}{A + \{a\}^T [D] \{b\}} \right]. \quad (24)$$

Enačba (23) podaja tangentni konstitucijski zakon, enačba (24) pa tangentno konstitucijsko matriko. V primeru asociativnega zakona tečenja ($Q = F$) sta vektorja $\{a\}$ in $\{b\}$ identična.

Invariante napetostnega tenzorja

Najpogosteje izražamo konstitucijske zakone v odvisnosti od invariant napetostnega tenzorja σ_{ij} ali deviatorja napetostnega tenzorja $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}$ (δ_{ij} je Kroneckerjev simbol). Invariante izračunamo po enačbah:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{kk} & J_1' &= s_{kk} \\ J_2 &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji} & J_2' &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji} \\ J_3 &= \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} & J_3' &= \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} \end{aligned} \quad (25)$$

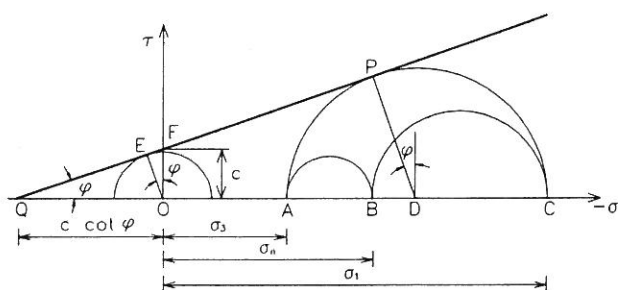
Z navedenimi napetostnimi invariantami lahko pregledno zapišemo večino konstitucijskih zakonov. Pri zapisu Mohr-Coulombovega pogoja plastičnega tečenja pa je veliko udobneje uporabiti Lodejev kot θ namesto tretje napetostne invariante. Lodejev kot je geometrijsko predstavljen na sliki 7, definira pa ga enačba:

$$\sin 3\theta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3'}{(J_2')^{3/2}} \quad \pi/6 \leq \theta \leq \pi/6. \quad (26)$$

Mohr-Coulombov pogoj plastičnega tečenja

Mohr-Coulombov pogoj plastičnega tečenja je posplošitev Coulombovega (1773) strižnega zakona (slika 5):

$$\tau = c - \sigma_n \tan \varphi. \quad (27)$$



Slika 5. Mohr-Coulombov strižni zakon

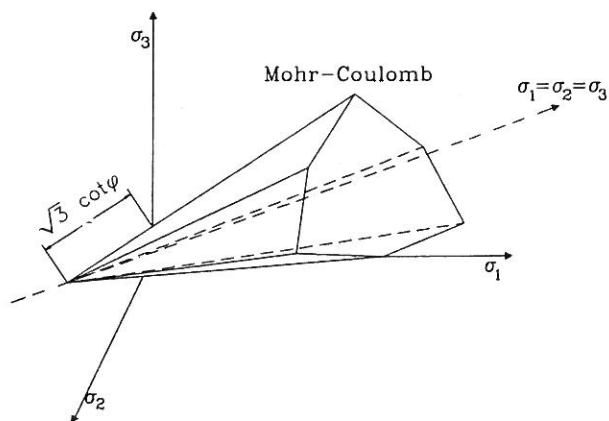
τ je maksimalna strižna napetost, σ_n je glavna normalna napetost (tlak je negativen), c je kohezija in φ kot notranjega trenja materiala. Ob upoštevanju $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ lahko iz geometrije na sliki 5 zapišemo Mohr-Coulombov zakon v splošnejši obliki:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2c \cos \varphi - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi. \quad (28)$$

Dokler je napetostno stanje znotraj ploskve, ki jo predstavlja enačba, (28) je material v elastičnem območju, ko pa se dotakne ploskve, se začne plastično tečenje. Zapišimo torej zgornji izraz v obliki funkcije tečenja ob tem pa ga izrazimo še v odvisnosti od invariant napetostnega tenzorja J_1, J_2' in θ :

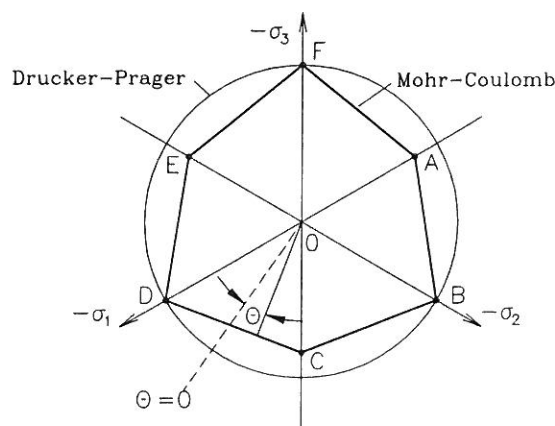
$$F = \frac{1}{3}J_1 \sin \varphi + \sqrt{J_2'} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \varphi \right) - c \cos \varphi. \quad (29)$$

Slika 6 prikazuje Mohr-Coulombovo ploskev tečenja v napetostnem prostoru $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, slika 7 pa njen prerez z oktaedrsko (imenovano tudi π) ravnino.



Slika 6. Mohr-Coulombova ploskev plastičnega tečenja v prostoru glavnih napetosti

Model (brez utrjevanja) je povsem popisan s štirimi parametri: K in G - elastični konstanti (kompresijski in strižni modul) ter c in φ - strižna parametra. Upoštevanje utrjevanja oziroma mehčanja zahteva dodatno še vsaj en parameter.



Slika 7. Mohr-Coulombova in Drucker-Pragerjeva ploskev plastičnega tečenja v preseku z oktaedrsko ravnino

Drucker-Pragerjev pogoj plastičnega tečenja

Drucker in Prager sta leta 1952 predstavila poenostavitev Mohr-Coulombovega modela. Nepravilno šeststrano piramido, ki predstavlja Mohr-Coulombovo ploskev tečenja v napetostnem prostoru sta zamenjala s krožnim stožcem. V preseku z oktaedrsko ravnino je Drucker-Pragerjeva ploskev tečenja torej krožnica (slika 7). Enostavnejšo obliko predstavlja tudi enostavnejša enačba:

$$F(J_1, J_2') = \alpha J_1 + \sqrt{J_2'} - k' = 0. \quad (30)$$

Parameter α predstavlja naklon ploskve tečenja v ravnini $J_1, \sqrt{J_2'}$, k' pa odsek na $\sqrt{J_2'}$ osi pri $J_1 = 0$ (slika 8). Podobnost s strižnimi parametroma iz Mohr-Coulombovega modela daje slutiti, da med temi štirimi parametri obstaja matematična relacija. Vendar zveza ni ena sama. Odvisna je od tega kako vrišemo Drucker-Pragerjevo krožnico v Mohr-Coulombov šestkotnik. V primeru splošnega triosnega napetostnega stanja imamo dve skrajni možnosti: krožnico lahko potegnemo skozi bolj oddaljena (zunanja) oglišča šestkotni-

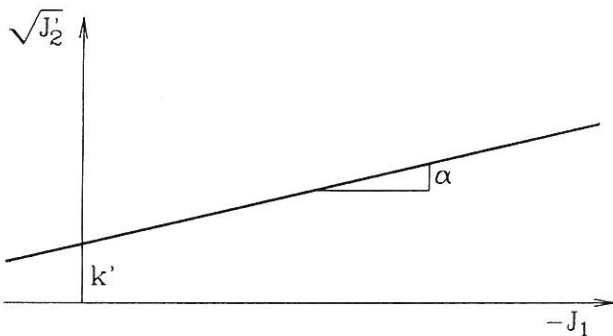
ka (točke B, D, F na sliki 7), ali skozi bližja (notranja) oglišča (A, C, E). V prvem primeru izračunamo parametra α in k' po enačbah (31), v drugem pa po enačbah (32):

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, \quad k' = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad (31)$$

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}, \quad k' = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)} \quad (32)$$

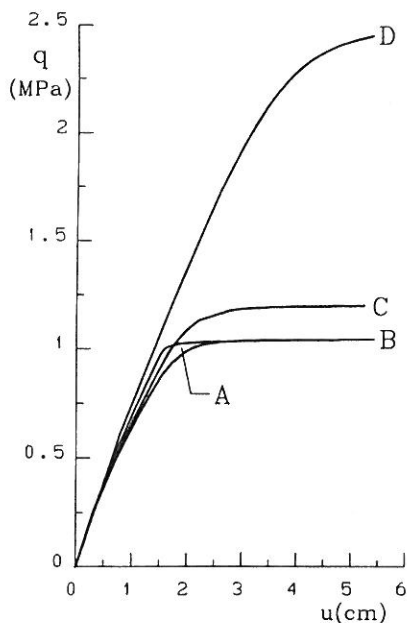
V primeru ravninskega deformacijskega stanja sta vrednosti:

$$\alpha = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}}, \quad k' = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}} \quad (33)$$



Slika 8. Drucker-Pragerjeva ploskev plastičnega tečenja v koordinatnem sistemu $\sqrt{J_2} - J_1$

Tudi idealno elastoplastični Drucker-Pragerjev model je povsem opisan s štirimi parametri: K in G ter k' in α .



Slika 9. Nosilnost tal pod trakato obtežbo: primeri A, B, C in D

Velja opozoriti, da daje uporaba Drucker-Pragerjevega modela z različno preračunanima konstantama α in k' (odvisno od napetost-

nega stanja) lahko zelo različne rezultate in pogosto drugačne od tistih, ki jih dobimo z uporabo Mohr-Coulombovega modela, katerega smatramo v mehaniki tal za bolj primerne (Zienkiewicz, 1976; Chen, Mizuno, 1990). Na sliki 9 je reproduciran primer iz citiranih publikacij. Temeljna tla s karakteristikami: $E = 2.07 \cdot 10^5$ kPa, $\nu = 0.3$, $c = 69$ kPa, $\varphi = 20^\circ$ so obremenjena s trakasto obtežbo širine 3.14 m. Iščejo mejno vrednost te obtežbe (nosilnost). Vpliv lastne teže tal je bil v teh analizah zanemarljiv. Predstavljeni so štirje računi:

- A Mohr-Coulombov model,
- B Drucker-Pragerjev model - k' in α za ravninsko deformacijsko stanje - enačba (33),
- C Drucker-Pragerjev model - k' in α po enačbi (32),
- D Drucker-Pragerjev model - k' in α po enačbi (31).

OSNOVNE ENAČBE MKE

Ravnovesne enačbe za analizo po MKE običajno izpeljemo iz principa o virtualnem delu. Splošno se enačba v matrični obliki glasi:

$$\int_V \{\sigma\} \{\delta \varepsilon\} dV = \int_V \{f\} \{\delta u\} dV + \int_{S_p} \{p\} \{\delta u\} dS_p \quad (34)$$

ali

$$W_{not} = W_{zun} \quad (35)$$

oziroma z besedami: delo notranjih sil je enako delu zunanjih sil. V enačbi pomeni V volumen obravnavanega telesa, S_p površino telesa, na kateri je predpisana zunanja obtežba, $\{f\}$ volumske sile (lastna teža), $\{p\}$ površinske sile in $\{u\}$ pomike. Ob upoštevanju aproksimacij metode končnih elementov:

$$\{u\} = [N]\{U\}, \quad \{\varepsilon\} = [B]\{U\} \quad (36)$$

($[N]$ je matrika oblikovnih funkcij, $[B]$ matrika odvodov oblikovnih funkcij, $\{U\}$ vektor vozliščnih pomikov) in zveze med napetostmi in deformacijami:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (37)$$

ter ob razmisleku, da mora enačba (34) veljati za vsakršen vektor virtualnih pomikov $\{\delta U\}$, preide enačba (34) v obliko:

$$\int_V [B][D][B]^T \{U\} dV = \int_V [N]^T \{f\} dV + \int_{S_p} [N]^T \{p\} dS_p \quad (38)$$

oziroma skrajšano

$$[K]\{U\} = \{P\} \quad (39)$$

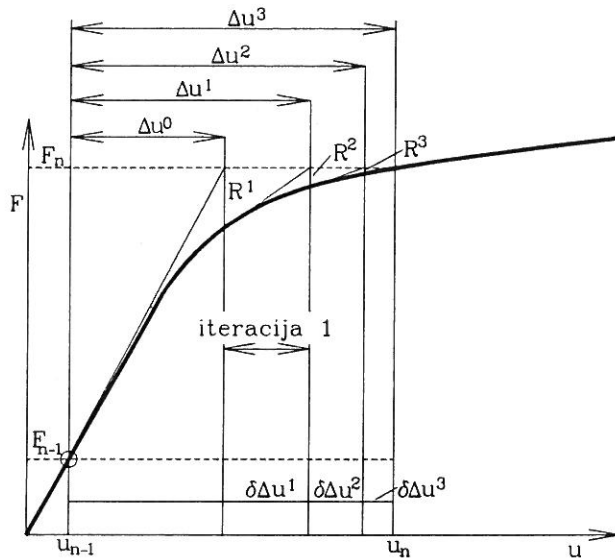
Pri tem smo upoštevali okrajšavi:

$$[K] = \int_V [B][D][B]^T dV \quad (40)$$

$$\{P\} = \int_V [N]^T \{f\} dV + \int_{S_p} [N]^T \{p\} dS_p \quad (41)$$

$[K]$ je togostna matrika sistema končnih elementov in $\{P\}$ vektor obtežbe. Zaradi nelinearne zveze med napetostmi in deformacijami velja enačba (39) le za infinitezimalno majhne prirastke pomikov in sil, uporabna pa je tudi za ustrezne končno velike prirastke obtežbe in pomikov:

$$[K]\{\Delta U\} = \{\Delta P\} \quad (42)$$



Slika 10. Klasični Newton-Raphsonov iteracijski postopek

Ker je enačba nelinearna, jo rešujemo iterativno z ustrezno numerično metodo. Široko se uporablja Newton-Raphsonova metoda v eni izmed znanih inačic. Metoda je za eno prostostno stopnjo prikazana na sliki 10. Debelejša črta prikazuje "pravo" rešitev, tanjša pa iterativno približevanje k tej rešitvi. Algoritem Newton-Raphsonovega iteracijskega postopka za rešitev enačbe (42) v časovnem koraku $n + 1$ sestavljajo naslednji koraki (spodnji indeksi se nanašajo na časovni korak, zgornji pa pomenijo zaporedno številko iteracije):

1. Znale so vse količine na koncu časovnega koraka n .
2. Izračun prirastka vektorja pomikov $\{\Delta U_{n+1}^0\}$. Dobimo ga kot rešitev enačbe (42). Pri tem uporabimo tangentno konstitucijsko matriko iz predhodnega (zadnjega skonvergirane) časovnega koraka n .
3. Račun prirastkov deformacij in napetosti. Tako izračunane napetosti imenujemo elastični prediktor. Kaj lahko se zgodi, da leži elastični prediktor izven ploskve plastičnega tečenja. Pravimo tudi, da tako napetostno stanje "krši" ploskev plastičnega tečenja. Izračunano napetostno stanje pa sme ležati kvečjemu na tej ploskvi. Zaradi potrebne korekcije (vračanja napetostnega stanja na ploskev plastičnega tečenja) v nekaterih točkah mreže končnih elementov ni ravnotežja med prirastkom zunanje obtežbe in notranjih sil ($\Delta F_{zun} \neq \Delta F_{not}$).
4. Račun "rezidualnih sil". Ustvarjeno neravnotežje moramo popraviti. Izračunamo vektorja notranjih in zunanjih sil po enačbah:

$$\{\Delta F_{not}\} = \int_V [B]^T \{\Delta \sigma_{n+1}^i\} dV \quad (43)$$

$$\{\Delta F_{zun}\} = \int_V [N]^T \{\Delta f\} dV + \int_{S_p} [N]^T \{\Delta p\} dS_p \quad (44)$$

in iz razlike t.i. vektor rezidualnih sil:

$$\{R^i\} = \{\Delta F_{zun}\} - \{\Delta F_{not}\} \quad (45)$$

5. Kontrola konvergence. V kolikor je norma vektorja rezidualnih sil manjša od neke izbrane tolerance, smo z rezultatom zadovoljni in nadaljujemo račun pri naslednjem časovnem (obtežnem) koraku (točka 1). Sicer nadaljujemo pri točki 6.
6. Izračunamo popravek vektorja prirastka pomikov $\{\delta \Delta U^i\}$:

$$[K^i]\{\delta \Delta U^i\} = \{R^i\} \quad (46)$$

7. Popravljeni vektor prirastka pomikov je:

$$\{\Delta U_{n+1}^i\} = \{\Delta U_{n+1}^{i-1}\} + \{\delta \Delta U^i\} \quad (47)$$

Račun nadaljujemo pri koraku 3.

Zahtevnejši bralec najde podrobnejša pojasnila o vračanju napetosti na ploskev plastičnega tečenja, o kriterijih konvergence, modifikacijah osnovnega Newton-Raphsonovega postopka in druge računске posebnosti v citirani literaturi (n.pr. Owen, Hinton, 1980 ali Chen, Mizuno 1990).

Simulacija izkopa

Pri analizi geotehničnih objektov pogosto predstavlja obtežbo nasipavanje ali izkop materiala. Za simulacijo gradnje nasipov ali izvajanja izkopov je potrebno v analizi po metodi končnih elementov storiti naslednje:

1. V vsakem obtežnem koraku, ki ga predstavlja izkop ali nasip materiala moramo redefinirati mrežo končnih elementov in odvzete ali dodane elemente upoštevati pri računu togostne matrike.
2. Določiti ekvivalentno vozliščno obtežbo.

Dodajanje in odzemanje elementov v mrežo končnih elementov je tehnične (programerske) narave in v splošnem ne predstavlja problema.

Za določitev ekvivalentne vozliščne obtežbe smo uporabili postopek (Borja, Lee, Seed, 1989), ki temelji na variacijski formulaciji in zagotavlja enoličnost rešitve in neodvisnost rešitve od števila faz izkopa ali nasipa.

Za zagotovitev ravnotežja v času t_n mora veljati enačba:

$$\{F_{not}\}_n = \{F_{zun}\}_n \quad (48)$$

kjer je:

$$\{F_{not}\}_n = \int_{V_n} [B]^T \{\sigma_n\} dV \quad (49)$$

$$\{F_{zun}\}_n = \int_{V_n} [N]^T \{f\} dV + \int_{S_{p_n}} [N]^T \{p\} dS_p \quad (50)$$

Z odstranitvijo ali dodajanjem elementov v časovnem inkrementu $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ pokvarimo ravnotežje sistema. Pogoj ravnotežja v času t_{n+1} zahteva rešitev sistema nelinearnih enačb oziroma določitev pomikov $\{u_{n+1}\}$, tako da bo izpolnjena enačba:

$$\{F_{not}\}_{n+1} = \{F_{zun}\}_{n+1} \quad (51)$$

Za določitev vektorja pomikov $\{u_{n+1}\}$ moramo enačbo linearizirati. Linearizacija okoli konfiguracije, ki jo določa vektor pomikov $\{u_{n+1}^k\}$ k -te iteracije, vodi k iterativnem postopku rešitve:

$$\{F'_{not}(\{u_{n+1}^k\})\} \{\Delta u^k\} = \{F_{zun}\}_{n+1} - \{F_{not}(\{u_{n+1}^k\})\} \quad (52)$$

in

$$\{u_{n+1}^{k+1}\} = \{u_{n+1}^k\} + \{\Delta u^k\}, \quad (53)$$

kjer je izraz:

$$\{F'_{not}(\{u_{n+1}^k\})\} = \left. \frac{\partial \{F_{not}(\{u\})\}}{\partial \{u\}} \right|_{\{u\}_{n+1}^k} \quad (54)$$

Jacobijeva matrika iz enačbe (54) je tangentska togostna matrika, ki jo ob upoštevanju enačbe (49) in elastoplastičnega odnosa med napetostmi in deformacijami lahko izračunamo:

$$\{F'_{not}(\{u_{n+1}^k\})\} = \int_{V_{n+1}} [B]^T [D^{ep}] [B] dV = [K_t]. \quad (55)$$

Enačba (52) se sedaj glasi:

$$[K_t] \{\Delta u^k\} = \{F_{zun}\}_{n+1} - \{F_{not}(\{u_{n+1}^k\})\} = \{R_{n+1}^k\}. \quad (56)$$

Če primerjamo enačbe (49) do (56) z enačbami (43) do (47), vidimo, da se ves postopek simulacije izkopa prevede na klasični iterativni Newton-Raphsonov postopek za rešitev sistema nelinearnih enačb. Učinek izkopa ali nasipa se pozna pri računu vektorja rezidualnih sil, saj dobimo zaradi integracije napetosti po spremenjenem integracijskem območju (V in S_p nista konstantna) na mejnici izkopa ali nasipa neuravnotežene sile $\{R_{n+1}^k\}$. Omeniti velja, da z uporabo opisanega postopka pri simulaciji izkopa avtomatično izpolnimo pogoj, da so napetosti na površini izkopa nič.

Implementacijo opisane metode si oglejmo na primeru izkopa tipičnega elementa $V^e \in V$. Brez preštevilčenja vozlišč in elementov v originalni mreži lahko direktno uporabimo enačbo (56) tako, da postavimo prispevke e -tega elementa h globalnim silam $\{F_{not}\}$ in F_{zun} na nič,

$$\{F'_{not}\} = \int_{V^e} [B]^T \{\sigma\} dV^e \equiv 0 \quad (57)$$

$$\{F'_{zun}\} = \int_{V^e} [N]^T \{f^e\} dV^e + \int_{S^e} [N]^T \{p^e\} dS^e \equiv 0 \quad (58)$$

in eliminiramo prispevek togosti tega elementa h globalni togostni matriki, tako da velja:

$$\| \| [K^{ep}] \| \| = \left\| \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV^e \right\| \ll 1 \quad (59)$$

kjer $\| \|$ pomeni normo matrike. Praktično to pomeni, da postavimo člene togostne matrike na neke zelo male vrednosti. Enačbi (57) in (58) zagotavljata, da so prispevki e -tega elementa h globalnem vektorju rezidualnih sil nič:

$$\{R^e\} = F_{zun}^e - F_{not}^e \equiv 0. \quad (60)$$

Pri elastoplastični analizi nasipavanja materiala nastopi problem, saj napetostno stanje v elementih, ki jih dodajamo, ni znano, vektor notranjih vozliščnih sil $\{F_{not}\}$ pa je odvisen od napetosti $\{\sigma_n\}$, prav tako je od napetosti odvisna tudi togostna matrika elementa. Običajno v računu postopamo tako, da predpostavimo nične začetne napetosti po elementu in upoštevamo elastično togostno matriko.

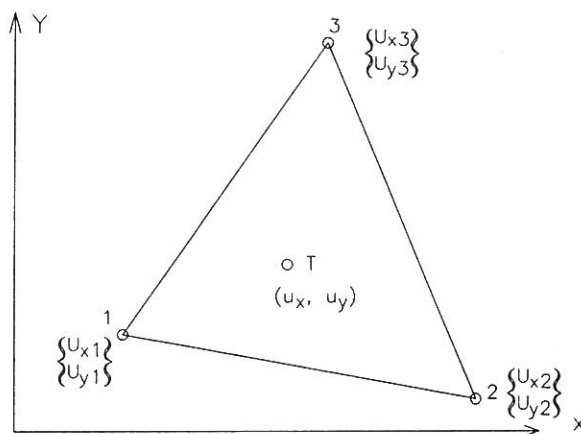
Uporabljeni končni elementi

Za analizo pilotnih sten smo v program vgradili tri vrste končnih elementov:

- trikotni končni element za diskretizacijo zemljine,
- linijski končni element za modeliranje pilotne stene in sider ter
- točkovni kontaktni element za simulacijo zdrsov in razpok med različnimi materiali (n.pr. med zemljino in pilotno steno).

Trikotni končni element

Uporabljeni trikotni končni element (slika 11) ima linearen potek pomikov po polju končnega elementa. Deformacije in napetosti po polju končnega elementa so konstantne. Element ima šest prostostnih stopenj - po dva neznanu pomika v treh vogalnih vozliščih trikotnika. Enačbe izbranega trikotnega končnega elementa so na voljo v večini knjig o MKE in jih tu ne navajamo.



Slika 11. Trikotni končni element

Linijski končni element

Za pilotno steno in sidra smo uporabili klasični elastični linijski element s po tremi prostostnimi stopnjami v vsakem vozlišču. Enačba linijskega elementa v lokalnem koordinatnem sistemu $x-y$ se glasi:

$$[K_l] \{U_l\} = \{P_l\}. \quad (61)$$

Togostna matrika v lokalnem koordinatnem sistemu je:

$$[K_l] = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2 & 0 & 0 & -AL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12I & 6IL & 0 & -12I & 6IL \\ 0 & 6IL & 4IL & 0 & -6IL & 2IL \\ -AL^2 & 0 & 0 & AL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12I & -6IL & 0 & 12I & -6IL \\ 0 & 6IL & 2IL & 0 & -6IL & 4IL \end{bmatrix}, \quad (62)$$

vektorja sil in pomikov pa:

$$\{P_l\}^T = \{N_1, Q_1, M_1, N_2, Q_2, M_2\} \quad (63)$$

$$\{U_l\}^T = \{U_{x1}, U_{y1}, \Phi_1, U_{x2}, U_{y2}, \Phi_2\} \quad (64)$$

kjer je

- N osna sila v vozlišču elementa,
- Q prečna sila v vozlišču elementa,

M upogibni moment v vozlišču elementa,
 U_i pomik v smeri i v vozlišču elementa,
 Φ zasuk v vozlišču elementa,
 E elastični modul materiala,
 I vztrajnostni moment prereza elementa okoli z osi,
 A površina prereza elementa.

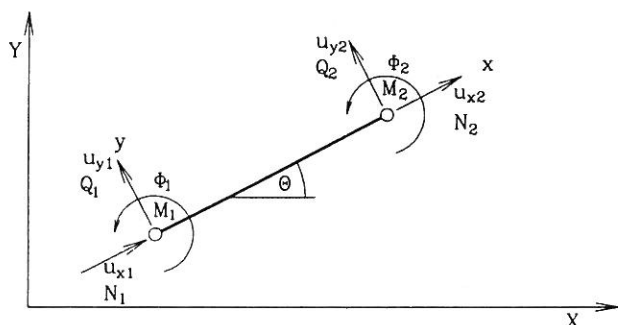
Predno togostno matriko linijskega elementa prištejemo v enačbo sistema, jo moramo transformirati v globalni koordinatni sistem:

$$[K] = [T]^T [K_l] [T], \quad (65)$$

kjer je $[K]$ matrika linijskega elementa v globalnem koordinatnem sistemu, $[T]$ pa transformacijska matrika:

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\lambda = \cos \theta, \quad \mu = \sin \theta \quad (67)$$



Slika 12. Linijski končni element

Ker imamo v vsakem vozlišču linijskega elementa poleg dveh pomikov še zasuk, se število prostostnih stopenj v vozliščih linijskih elementov ne ujema s številom prostostnih stopenj v vozliščih trikotnih elementov. Ker je znan obtežni vektor momentov v vozliščih linijskih elementov ($\{M\} = \{0\}$), lahko uporabimo postopek kondenzacije na celotni togostni matriki skupine linijskih elementov. Togostno matriko sistema linijskih elementov v globalnem koordinatnem sistemu lahko zapišemo ločeno po prostostnih stopnjah pomikov in zasukov:

$$\begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{pp}] & [K_{pm}] \\ [K_{mp}] & [K_{mm}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{\Phi\} \end{Bmatrix}. \quad (68)$$

Ker velja:

$$\{M\} = [K_{mp}]\{U\} + [K_{mm}]\{\Phi\} = \{0\}, \quad (69)$$

lahko zapišemo:

$$\{\Phi\} = -[K_{mm}]^{-1}[K_{mp}]\{U\}. \quad (70)$$

Ob upoštevanju enačbe (68) dobimo:

$$\{P\} = ([K_{pp}] - [K_{pm}][K_{mm}]^{-1}[K_{mp}])\{U\} = [K_{kon}]\{U\} \quad (71)$$

in

$$[K_{kon}] = [K_{pp}] - [K_{pm}][K_{mm}]^{-1}[K_{mp}]. \quad (72)$$

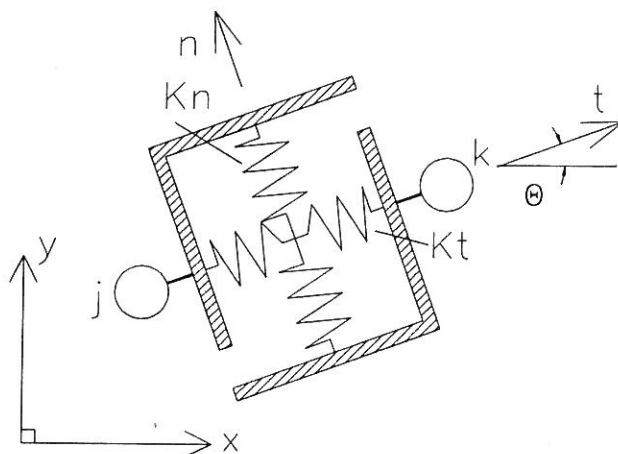
Oznake v enačbah (68)-(72) pomenijo:

$[K_{kon}]$ kondenzirana togostna matrika,
 $\{P\}$ vektor vozliščnih sil,
 $\{M\}$ vektor vozliščnih momentov,
 $\{U\}$ vektor vozliščnih pomikov,
 $\{\Phi\}$ vektor vozliščnih zasukov.

Pri tvorjenju matrike sistema končnih elementov predstavlja prispevek linijskih elementov kondenzirana matrika skupine linijskih elementov $[K_{kon}]$. Za račun notranjih statičnih količin je potrebno najprej izračunati vektor vozliščnih zasukov po enačbi (70), nato transformirati vektor globalnih vozliščnih pomikov v lokalni sistem linijskega elementa in končno po enačbi (61) določiti iskane notranje sile in upogibne momente.

Točkovni kontaktni element

Ker vladajo na stiku med podporno konstrukcijo in zemljino specifične razmere, smo uporabili še poseben točkovni kontaktni element. Fizično ta element nima dimenzije. Predstavljata ga dve ortogonalni vzmeti, ena v normalni in ena v tangentialni smeri kontakta (slika 13). Ima dve vozlišči in štiri prostostne stopnje.



Slika 13. Točkovni kontaktni element

Enačba elementa v lokalnem koordinatnem sistemu je podana z izrazom:

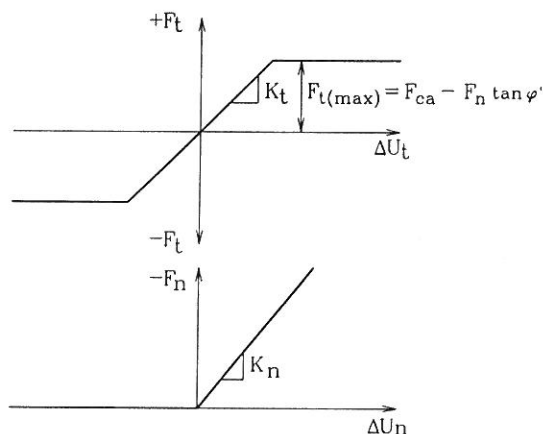
$$\begin{Bmatrix} F_t \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_t & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U_t \\ \Delta U_n \end{Bmatrix} \quad (73)$$

kjer je

K_t togost vzmeti v tangencialni smeri kontakta,
 K_n togost vzmeti v smeri normale na kontakt,
 ΔU_t raztezek vzmeti v tangencialni smeri kontakta,
 ΔU_n raztezek vzmeti v smeri normale na kontakt,
 F_t sila v tangencialni vzmeti in
 F_n sila v normalni vzmeti.

Podobno kot za togostno matriko linijskega elementa velja tudi za matriko kontaktnega elementa, da jo moramo transformirati v

globalni koordinatni sistem predno jo prištejemo v globalno matriko sistema (enačba (65)).



Slika 14. Delovna diagrama za tangentno in normalno togost kontaktnega elementa

Ker s konstantnimi togostmi K_t in K_n ne moremo simulirati dejanskega obnašanja na stiku med konstrukcijo in zemljino (zdrs po kontaktu ali razpoko), smo definirali konstitucijski zakon v obliki Mohr-Coulombovega strižnega zakona (tlačna sila je negativna):

$$F_{t_{max}} = F_{ca} - F_n \tan \varphi' \quad (74)$$

F_{ca} je adhezijska sila, φ' pa trenjski kot na stiku dveh materialov. V primeru, ko dejanska sila F_t preseže vrednost $F_{t_{max}}$, nastopi plastifikacija in zdrs po kontaktu, saj je nosilnost na kontaktu izkoriščena in je tangentna togost enaka nič. Ker zemljina ne prenese natezних napetosti, je v primeru natezne normalne sile ($F_n > 0$) togost v normalni in tangenčni smeri enaka nič. Delovna diagrama za tangentno in normalno smer sta podana na sliki 14.

PRIMER

Na podlagi predstavljenih teoretičnih osnov smo izdelali program BOJAN in ga uporabili za analizo pilotnih sten. Sistematična primerjava analiz pilotnih sten po vsakdanjih klasičnih postopkih z analizami po nelinearni deformacijski metodi s programom BOJAN je prikazana v posebnem članku (Pulko, Logar, 1993). Za prikaz delovanja programa podajamo rezultate analize dvometrskega izkopa zemljine in sicer:

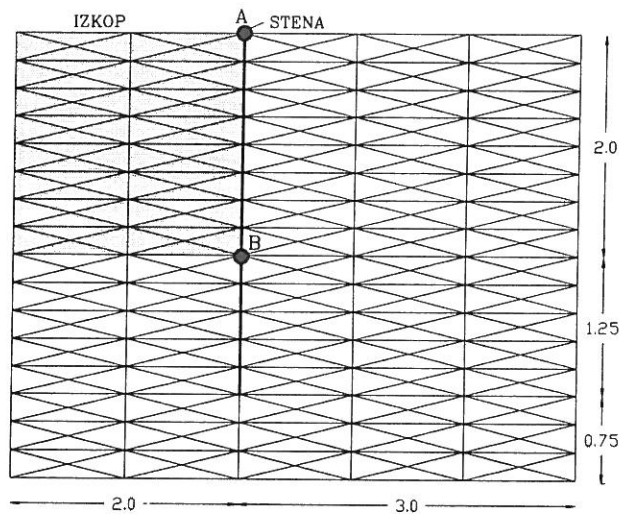
- elastična analiza izkopa brez pilotne stene
- elastoplastična analiza izkopa brez pilotne stene in
- elastoplastična analiza izkopa, varovanega s pilotno steno.

Karakteristike tal so: $\gamma = 20.0 \text{ kN/m}^3$, $E = 10.000 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.4$, Drucker-Pragerjeva ploskev plastičnega tečenja in plastičnega potenciala (asociativni model) je definirana s parametroma $\alpha = 0.14$ in $k' = 2.32 \text{ kPa}$. Pri primeru c) smo za pilotno steno uporabili elastični modul betona $E_b = 3.15 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ in debelino stene 0.25 m^2 .

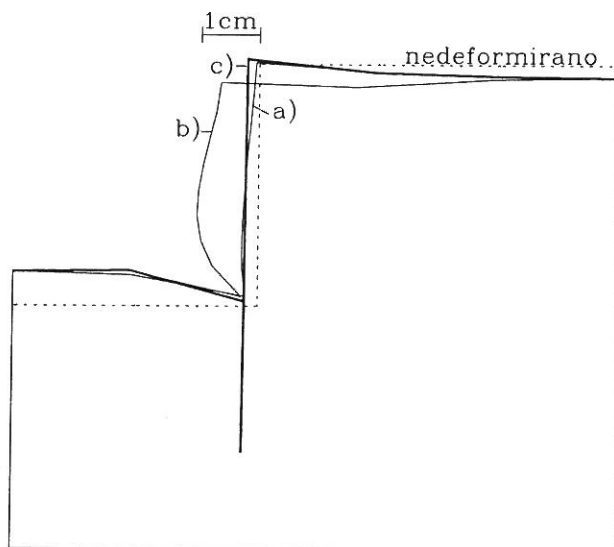
Mreža končnih elementov je prikazana na sliki 15, na sliki 16 so prikazane deformirane oblike izkopa za primere a), b) in c), na sliki 17 pa so označeni plastificirani elementi v primerih b) in c). V preglednici I podajamo še vrednosti izračunanih pomikov karakterističnih točk A in B (slika 15).

Preglednica I.

Primer	u_x^A	u_y^A	u_x^B	u_y^B	Št. iteracij
a	-0.00050	0.00021	-0.00208	0.00165	0
b	-0.00635	-0.00304	-0.00272	0.00164	13
c	-0.00199	0.00081	-0.00225	0.00081	5

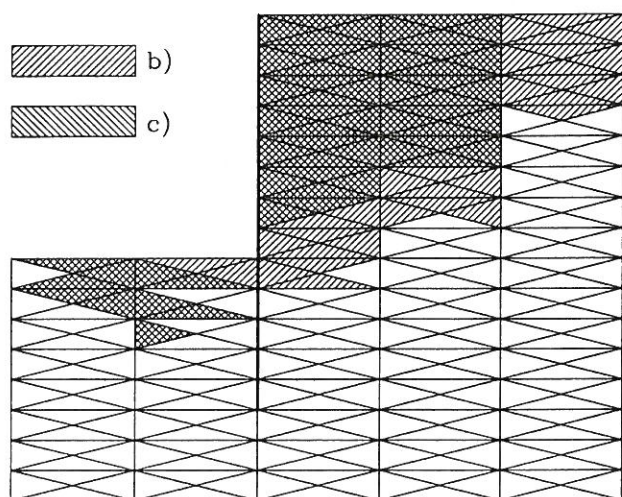


Slika 15. Uporabljena mreža končnih elementov



Slika 16. Deformirane oblike izkopa za primere a), b) in c)

Iz rezultatov je razvidno, da pride v dnu izkopa (točka B) do dvižkov, kar je zaradi razbremenitve razumljivo. Vertikalna stena izkopa se horizontalno premakne proti izkopu. Vogalna točka B se v vseh treh primerih zelo podobno obnaša, bistveno pa se razlikuje premik vertikalne stene izkopa, zlasti v horizontalni smeri. Ta razlika gre na račun plastičnih deformacij elementov, v katerih je prišlo do plastifikacije. Slednji so označeni na sliki 17. Vidimo, da je v primeru c), ko izkop varuje pilotna stena, področje plastifikacije manjše.



Slika 17. Plastificirani elementi za primera b) in c)

ZAKLJUČKI

V članku smo prikazali teoretične osnove za analizo konzolnih ali sidranih pilotnih sten v elastoplastični zemljini. V prvem delu so opisane osnovne enačbe elastoplastičnih snovi, podrobneje pa sta predstavljena Mohr-Coulombov in Drucker-Pragerjev model. V drugem delu so predstavljene posebnosti v zvezi z uporabo metode končnih elementov pri računu pilotnih sten, kot so: posebna končna elementa za simulacijo stene in sider ter za simulacijo razpok in zdrsa med različnimi materiali in postopek za analizo izkopa zemljine. Na teh teoretičnih osnovah je bil pripravljen računalniški program, ki omogoča praktične račune pilotnih sten (in drugih geotehničnih problemov) z metodo končnih elementov. Za ilustracijo delovanja programa so prikazani tudi rezultati analize izkopa brez in z uporabo pilotne stene.

PRIZNANJA

Avtorja sta mlada raziskovalca na Katedri za mehaniko tal z laboratorijem pri FAGG. Pričujoči prispevek je nastal v okviru raziskovalne naloge "Konsolidacija in lezenje tal", ki jo, tako kot raziskovalno usposabljanje obeh avtorjev, financira Ministrstvo za znanost in tehnologijo Republike Slovenije. Mentorju doc.dr. Bojanu Majesu se zahvaljujema za koristne nasvete pri nastajanju tega dela.

LITERATURA

- Arslan, U., Breth, H., Wanninger, R. (1981). An Elastoplastic Analysis of Anchored Walls. Proc. X ICSMFE, Stockholm, Vol. 2, 21-28.
- Bičanić, N., Damjanić, F.B. (urednika) (1992). Lecture Notes on Nonlinear Engineering Computations, TEMPUS Advanced Computational Engineering Mechanics, Ljubljana.
- Borja, R.I., Lee, S.R., Seed, R.B. (1989). Numerical Simulation of Excavation in Elastoplastic Soils. Int. J. Num. Anal. Meth. Geom., Vol 13. 231-249.
- Chen, W.F., Mizuno, E. (1990). Nonlinear Analysis in Soil Mechanics - Theory and Implementation, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.
- Desai, C.S., Siriwardane, H.J. (1984). Constitutive Laws for Engineering Materials With Emphasis on Geologic Materials, Prentice-Hall, New Jersey.
- Gudehus, G. (urednik) (1977). Finite Elements in Geomechanics,

John Wiley & Sons, London.

Majes, B., 1990. Dvodimenzionalna konsolidacija nelinearnih viskozno-zasičenih zemljin, Doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, Ljubljana.

Owen, D.R.J., Hinton, E. (1980). Finite Elements in Plasticity - Theory and Practice, Pinridge Press, Swansea.

Pulko, B., Logar, J. (1993). Primerjava rezultatov računskih analiz konzolnih in sidranih pilotnih sten, Zbornik 1. posvetovanja slovenskih geotehnikov, Bled.

Saje, M., (1989). Enačbe snovi, Katedra za mehaniko FAGG, Ljubljana.

Vaziri, H.H., Troughton, V.M., (1992). An Efficient Three-Dimensional Soil-Structure Interaction Model for Analysis of Earth Retaining Structures. Can. Geotech. J. 29, 529-538.

Zienkiewicz, O.C. (1976). Plasticity and Some of Its Corollaries in Soil Mechanics. Collapse and Continuing Deformation Under Load Repetition. Proc. of 2nd Int. Conf. on Num. Meth. in Geomechanics, Blacksburg, Vol. III, 1275-1303.