

Borut MACUH
asist.mag., univ.dipl.inž.grad., Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo

Bojan ŽLENDER
prof.dr., univ.dipl.inž.grad., Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo

ANALIZA PADAJOČEGA KAMENJA

POVZETEK: Prispevek podaja analizo gibanja padajočega kamenja po pobočju. Izpeljana je analitična rešitev gibanja posameznega kamnitega kosa po pobočju z upoštevanjem teorije trka dveh teles in prostega pada ter vplivov geometrijskih in mehanskih karakteristik. Z variranjem posameznih geometrijskih in mehanskih parametrov je bila izvedena parametrična analiza. Uporabnost rešitve je prikazana na primeru strmega in deloma previsnega pobočja Meljskega hriba.

ROCK-FALL ANALYSIS

SUMMARY: The paper presents the rock-fall analysis on the slope. The analytical solution of motion of an individual rock piece on slope is derived using collision theory of two bodies and free-fall theory, and influences of geometrical and mechanical characteristics. The parametrical analysis was performed varying individual geometrical and mechanical parameters. The applicability of the solution is represented on the example of the steep and partly overhanging slope of Melje hill.

UVOD

Prispevek podaja analizo gibanja padajočega kamenja po pobočju. Padanje je težko predvidljivo in ga je nemogoče natančno opisati zaradi mnogih faktorjev kot so: geometrija pobočja, mehanske lastnosti zemeljskih materialov in rastlinja, ki tvorijo površino pobočja, heterogena zgradba pobočja, količina, velikost in oblika padajočega kamenja, mehanske lastnosti in drugi vplivi. Kadar je podlaga dovolj položna se odboji hitro manjšajo in se kamen ustavi, pri strmejšem naklonu in neravni podlagi pa so odboji lahko dolgi in visoki, zaradi oblike in naklona pobočja ter ostalih vplivov pa se tudi povečuje hitrost padanja. Namen analitične rešitve je podati analitični opis gibanja padajočega kamenja po pobočju, ki bo upošteval prej naštetih faktorjev. Le ti se podajo s parametri in so sestavni del matematičnega modela pobočja. Model podaja geometrijske pogoje pobočja v izbranem prerezu ter mehanske lastnosti padajočega kamenja in površine pobočja. Za uporabnost je potrebna teoretična podlaga, analitična rešitev gibanja po pobočju, parametrična analiza (s katero se definira vpliv posameznih parametrov na rezultate in njihovo soodvisnost) in določitev parametrov odboja (če je možno na podlagi preizkusov, ali pa izkustveno).

Analitična rešitev gibanja posameznega kamnitega kosa po pobočju se izpelje z upoštevanjem teorije trka dveh teles in prostega pada. Rešitev upošteva naslednje vplive: velikost in maso kamnitega kosa, geometrijo (naklon) pobočja, ravnost podlage, vpadni kot, pogoje trka (koeficient trka), hrapavost podlage oz. pogoje drsenja (koeficient statičnega trenja, koeficient kinetičnega trenja) in gravitacijo.

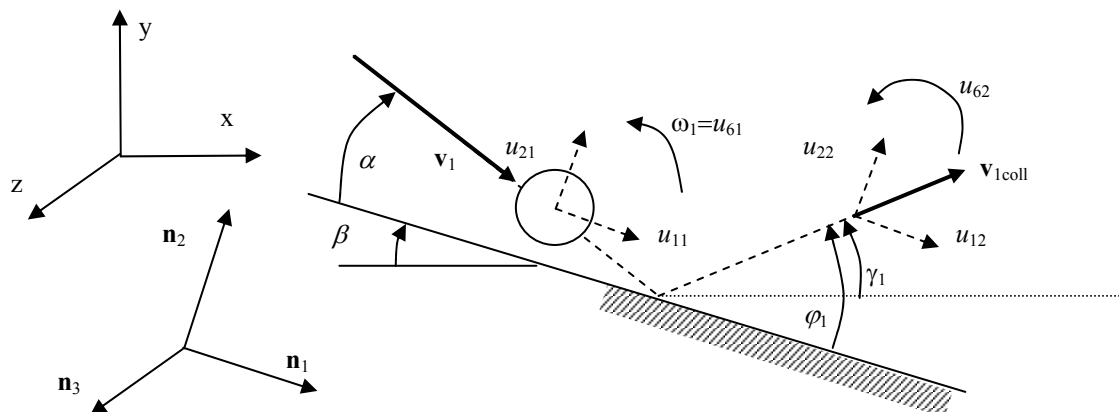
Parametrična analiza se izvede z variranjem posameznih geometrijskih in mehanskih parametrov, rezultati pa se podajo kot njihove funkcije. Uporaba matematičnega modela z analitično rešitvijo je v članku prikazana na praktičnem primeru potencialnega padanja kamenja po južnem strmim in deloma previsnem pobočju Meljskega hriba.

TEORETIČNA PODLAGA

Analitična rešitev gibanja posameznega kamnitega kosa po pobočju se izpelje z upoštevanjem teorije trka dveh teles in prostega pada.

Rešitve iz teorije trka dveh teles apliciramo na obravnavano okroglo kamnito maso z maso m in radijem R , ki trči pod kotom α ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) glede na osnovo s translatorsno hitrostjo \mathbf{v}_1 in kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega}_1$ (slika 1). Generalizirane hitrosti v smeri \mathbf{n}_i , ter v časih t_1 (pred trkom) in t_2 (po trku) označimo z u_{i1} oziroma u_{i2} ($i=1, 2, \dots, 6$). Njihove začetne vrednosti so:

$$\begin{aligned} u_{11} &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 & u_{21} &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_2 & u_{31} &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_3 \\ u_{41} &= \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{n}_1 & u_{51} &= \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{n}_2 & u_{61} &= \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{n}_3 \end{aligned} \quad (1)$$



Slika 1. Trk kosa kamnine ob pobočje v ravnini, ki jo tvorita enotska vektorja in \mathbf{n}_1 in \mathbf{n}_2 .

Trk – odboj brez drsenja

Pogoj, da pride do trka je $u_{21} < 0$. Hitrosti po trku so v primeru gibanja kamnite mase v ravnini, ki jo tvorita enotska vektorja in \mathbf{n}_1 in \mathbf{n}_2 enake

$$\begin{aligned} u_{12} &= -R \cdot u_{62} & u_{22} &= -\mathbf{e} \cdot u_{21} & u_{32} &= -R \cdot u_{42} = 0 \\ u_{42} &= \frac{I \cdot u_{41} - m \cdot R \cdot u_{31}}{m \cdot R^2 + I} = 0 & u_{52} &= 0 & u_{62} &= \frac{I \cdot u_{61} - m \cdot R \cdot u_{11}}{m \cdot R^2 + I} \end{aligned} \quad (2)$$

Komponenti impulza v tangencialni smeri S_1 in normalni smeri S_2 sta

$$S_1 \approx m \cdot (u_{12} - u_{11}) \quad S_2 = -m \cdot (\mathbf{e} + 1) \cdot u_{21} \quad (3)$$

Če je izpolnjen pogoj

$$|S_1| < \mu \cdot |S_2| \quad u_{12} - u_{11} < \mu \cdot (\mathbf{e} + 1) \cdot u_{21} \quad (4)$$

v času t_2 ne pride do drsenja ter je kot odboja enak

$$\varphi' = \arctan |u_{22} / u_{12}| \quad (5)$$

Dršenje

V primeru, da pogoj (4) ni izpolnjen, pride v času t_2 do drsenja in je potrebno uporabiti naslednje dodatne enačbe:

$$\alpha^* \approx u_{11} + R \cdot u_{61} \quad S_1 = -\mu' \cdot \alpha^* \cdot |S_2| / |\alpha^*| \quad (6)$$

$$u_{12} \approx u_{11} + S_1 / m \quad u_{62} \approx u_{61} + R \cdot S_1 / I \quad (7)$$

Kot odboja φ' je prav tako enak izrazu (5). V obeh primerih, tudi ko je $u_{12} < 0$, je dejanski kot odboja enak

$$\varphi = \pi/2 + \varphi' \quad (8)$$

Kotaljenje

Kotaljenje nastopi, ko je hitrost po odboju manjša od neke primerljive hitrosti v_{\min} . Obravnavamo različne primere, glede na velikost naklona pobočja β in strižni kot φ .

$$\underline{\beta = \varphi}$$

Končna hitrost v_k je enaka hitrosti pred začetkom kotaljenja v_z .

$$v_k = v_z \quad (9)$$

$$\underline{\beta > \varphi}$$

Hitrost se povečuje, če poznamo razdaljo d od začetka kotaljenja do opazovane točke je končna hitrost v_k enaka (v_z je začetna hitrost tangencialno na segment):

$$v_k = \sqrt{v_z^2 + 2 \cdot d \cdot g \cdot (\pm \sin \beta - \cos \beta \cdot \tan \varphi)} \quad (10)$$

Zgornji predznak v gornji enačbi je uporabljen za začetno hitrost navzdol ali nič, spodnji pa za začetno hitrost navzgor.

$$\beta < \varphi$$

Hitrost se zmanjšuje, končno razdaljo d_k določimo z izrazom:

$$d_k = -\frac{v_z^2}{2 \cdot g \cdot (\pm \sin \beta - \cos \beta \cdot \tan \varphi)} \quad (11)$$

ANALITIČNA REŠITEV

Opis pobočja

Pobočje opišemo v globalnem kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) , katerega izhodišče in smeri izberemo glede na konfiguracijo terena. Os y je vertikalna os, x os je usmerjena v smeri prečnega geološkega prereza, os z pa pravokotno na prerez.

Karakteristike odboja

Obravnavamo okroglo kamnito maso z lastnostmi:

m	[kg]	masa
V	[m ³]	prostornina
ρ	[kg/m ³]	gostota
R_{\min}	[m]	izmerjeni najmanjši radij
R_{\max}	[m]	izmerjeni največji radij
R	[m]	pripadajoči radij idealno okrogle kamnite mase
I	[kgm ²]	pripadajoči vztrajnostni moment

$$V = \frac{T}{\gamma} = \frac{m \cdot g}{\rho \cdot g} \quad R = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot m}{3 \cdot \pi \cdot \rho}} \quad I = \frac{2}{5} m \cdot R^2 \quad (12)$$

Trk kamnite mase ob površino pobočja opišemo z mehanskimi parametri:

e	[-]	koeficient trka
μ	[-]	koeficient statičnega trenja
μ'	[-]	koeficient kinetičnega trenja

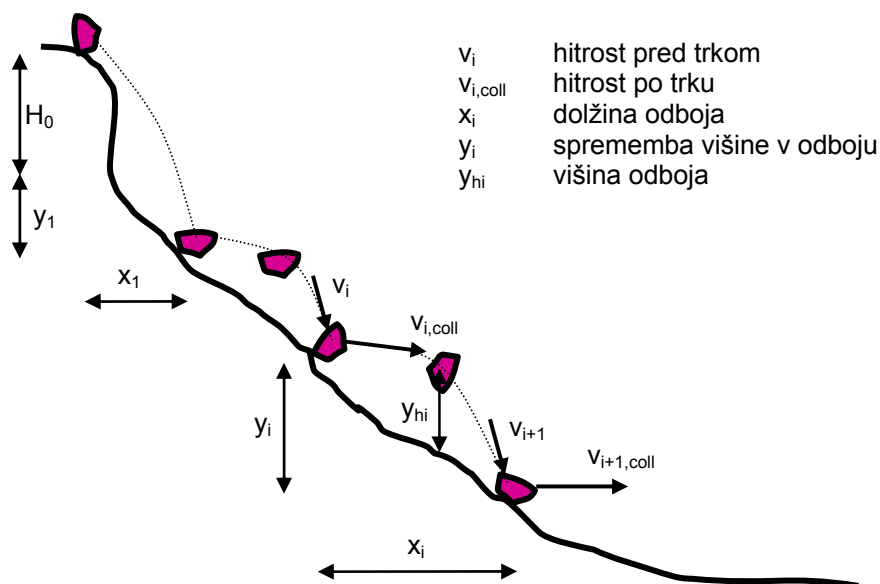
Potek analize

Padajoči kos kamnine z maso m in radijem R ima nek začetni položaj na pobočju (x_0, y_0, z_0) in začetno hitrost (v_0, ω_0) , ki je posledica odloma kamnite mase.

V obravnavanem problemu moramo najprej določiti hitrost padajočega kosa kamnine ob prvem trku. Določimo jo tako, da najprej izračunamo točko presečišča med parabolo leta kamnitega kosa in premico pobočja. Če ima začetna translatorska hitrost samo horizontalni komponenti in ju označimo z v_{x0}, v_{z0} ter dalje označimo z β_x in β_z naklon pobočja, s H_0 višino prostega pada, in z g težnostni pospešek, potem so spremembe horizontalnih koordinat x_1, z_1 in vertikalne koordinate y_1 prvega trka enake:

$$x_1 = \frac{v_{x0}^2}{g} \tan \beta_z + \sqrt{\left(\frac{v_{x0}^2}{g} \tan \beta_z\right)^2 + 2 \cdot \frac{v_{x0}^2}{g} \cdot H_0} \quad z_1 = \frac{v_{z0}^2}{g} \tan \beta_x + \sqrt{\left(\frac{v_{z0}^2}{g} \tan \beta_x\right)^2 + 2 \cdot \frac{v_{z0}^2}{g} \cdot H_0}$$

$$y_1 = -x_1 \cdot \tan \beta_z - z_1 \cdot \tan \beta_x - H_0 \quad (13)$$



Slika 2. Prerez pobočja s prikazanim potovanjem kosa kamnine.

Horizontalni komponenti hitrosti in komponente kotne hitrosti ostanejo nespremenjene. Vertikalna komponenta hitrosti pa se zaradi vpliva gravitacije poveča na

$$v_{1y} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H_0 + x_1 \cdot \tan \beta_z + z_1 \cdot \tan \beta_x)} \quad (14)$$

Vpadna translacijska in rotacijska hitrost pred prvim odbojem je:

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1z}^2 + v_{1y}^2} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_{1x}^2 + \omega_{1y}^2 + \omega_{1z}^2} \quad (15)$$

Komponente hitrosti pred trkom, zapisane v globalnem koordinatnem sistemu, transformiramo v lokalni koordinatni sistem, ki ima izhodišče v točki trka.

Z uporabo teorije trka dveh teles dobimo normalno in tangencialni komponenti translatorne in kotne hitrosti po trku v lokalnem koordinatnem sistemu

$$v_{t1a} = u_{12} = -R \cdot u_{62} \quad v_{na} = u_{22} = -e \cdot u_{21} \quad \omega_{t2a} = u_{62} = \frac{I \cdot u_{61} - m \cdot R \cdot u_{11}}{m \cdot R^2 + I} \quad (16)$$

Komponente translatorne hitrosti in kotne hitrosti po trku v lokalnem koordinatnem sistemu transformiramo nazaj v globalni koordinatni sistem.

Po odboju se zaradi prostega pada poveča vertikalna komponenta hitrosti, ostale komponente ostanejo nespremenjene. Najprej izračunamo položaj točke trka (x_2 , y_2 in z_2 so merjene od predhodne točke trka)

$$x_2 = \frac{2 \cdot v_{1coll}^2 \cdot \cos^2 \gamma_{1z}}{g} (\tan \beta_z + \tan \gamma_{1z}) \quad z_2 = \frac{2 \cdot v_{1coll}^2 \cdot \cos^2 \gamma_{1x}}{g} (\tan \beta_x + \tan \gamma_{1x})$$

$$y_2 = -\frac{2 \cdot v_{1coll}^2}{g} \cdot [\cos^2 \gamma_{1z} (\tan \beta_z + \tan \gamma_{1z}) \cdot \tan \beta_z + \cos^2 \gamma_{1x} (\tan \beta_x + \tan \gamma_{1x}) \cdot \tan \beta_x] \quad (17)$$

Vpadna hitrost pred drugim odbojem je

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2 \cdot g \cdot y_2} \quad (18)$$

Zanima nas tudi maksimalna višina odboja padajočega kosa kamnine med odbojema:

$$x_{h2} = \frac{x_2}{2} \quad z_{h2} = \frac{z_2}{2} \quad y_{h2} = \frac{v_{1coll}^2}{2 \cdot g} \cdot \left[\cos^2 \gamma_{1z} (\tan \beta_z + \tan \gamma_{1z})^2 + \cos^2 \gamma_{1x} (\tan \beta_x + \tan \gamma_{1x})^2 \right] \quad (19)$$

Analizo ponavljamo za vse naslednje odboje. V vsakem trenutku lahko določimo translatorsko, rotacijsko in totalno kinetično energijo:

$$W_{k,t} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad W_{k,r} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \quad W_{k,tot} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \quad (20)$$

PARAMETRIČNA ANALIZA

Parametrična analiza je bila izvedena na matematičnem modelu strmega pobočja s previsom na njegovem vrhu. Prečni prerez pobočja je prikazan na sliki 4. Geometrijske karakteristike pobočja v parametrični analizi varirajo v mejah podanih v preglednici 1.

Tabela 1: Geometrijske karakteristike pobočja

$L_0 = 0 - 20$	[m]	začetna dolžina pobočja
$H_0 \leq 20$	[m]	višina previsa
$L = 165$	[m]	dolžina pobočja
$H = 150$	[m]	višina pobočja
$30 \leq \beta \leq 60$	[°]	naklon pobočja

Mehanske karakteristike kosa kamnine in podlage na mestu trka v parametrični analizi varirajo, njihove meje so podane v Tabeli 2.

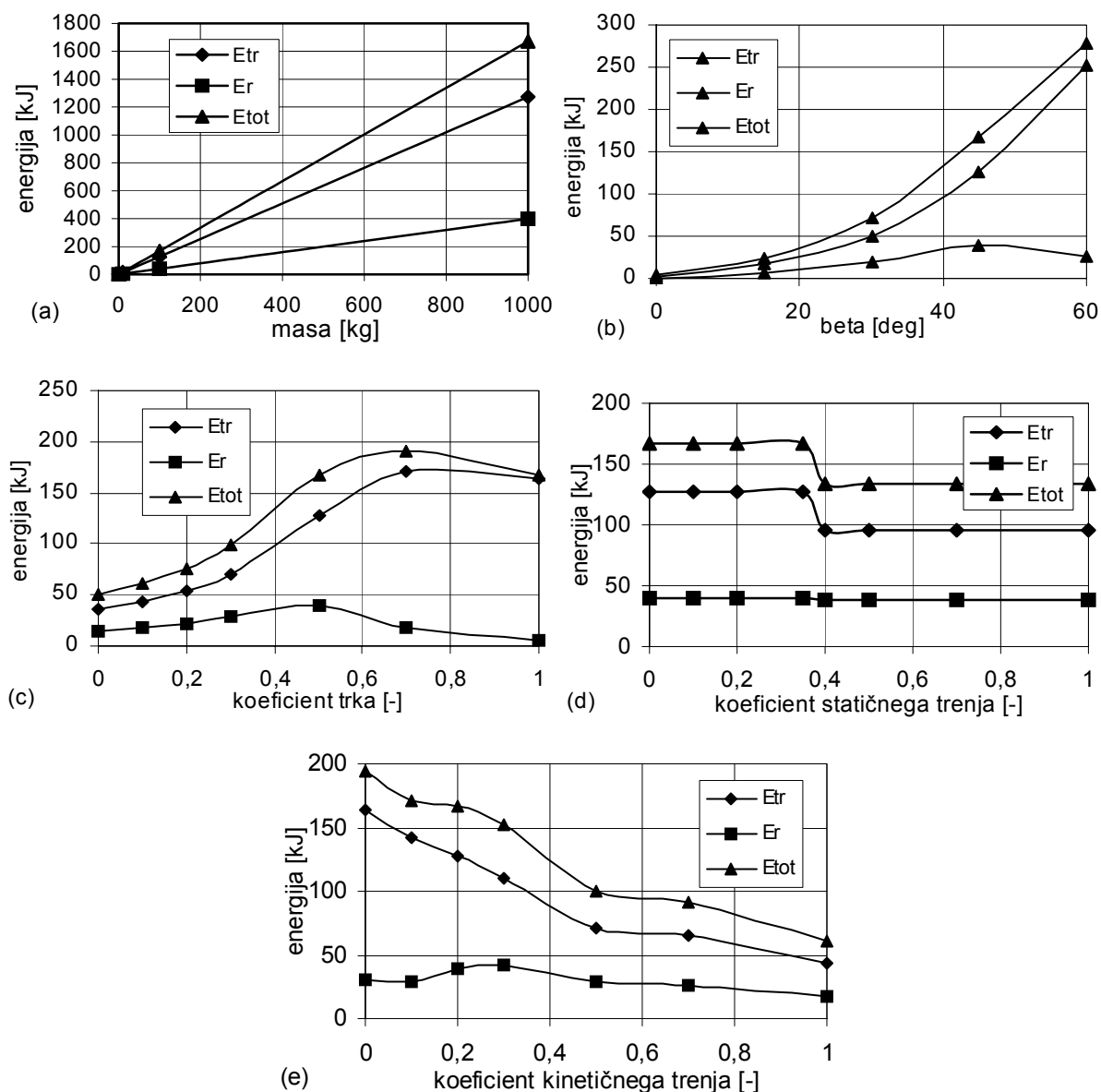
Tabela 2: Mehanske karakteristike kosa kamnine in trka

$m = 1 - 1000$	[kg]	masa kosa kamnine
$e = 0 - 1$	[-]	koeficient trka
$\mu = 0 - 1$	[-]	koeficient statičnega trenja
$\mu' = 0 - 1$	[-]	koeficient kinetičnega trenja

Rezultati parametrične analize za podane geometrijske in mehanske karakteristike so koordinate točk odbojev, višine odbojev, komponente hitrosti pred in po trku ter translatorska, rotacijska in skupna energija in se podajo kot funkcije parametrov podanih v tabelah 1 in 2.

V parametrični analizi so bile uporabljene osnovne vrednosti vhodnih podatkov: $m = 100$ kg, $e = 0.5$, $\mu = 0.2$, $\mu' = 0.2$ in $\beta = 45^\circ$. Posamično smo spreminjali vsak parameter, pri čemer so imeli ostali parametri svoje osnovne vrednosti.

Primeri rezultatov parametrične analize so prikazani na sliki 3.



Slika 3. Sovisnosti rezultatov: (a) energija - masa; (b) energija - naklona pobočja; (c) energija - koeficient trka; (d) energija - koeficient statičnega trenja; (e) energija - koeficient kinetičnega trenja.

PRIMER UPORABE

Uporaba analitične rešitve je prikazana na praktičnem primeru potencialnega padanja kamena po pobočju Meljskega hriba. Ob vznožju hriba, vzdolž reke Drave, je približno 500 m dolg odsek ceste, izpostavljen padajočemu kamenu z bližnjega zelo strmega pobočja s previsi v zgornjem delu.

V analizi so upošteevane predpostavljene vrednosti mase, velikosti in oblike kamnitih kosov, višina pada s previsa in aproksimirana konfiguracija terena (z naključnimi nakloni pobočja v točkah trka). Geometrijske karakteristike so v mejah podanih v tabeli 1 in na sliki 2.

Pobočja Meljskega hriba so izredno strma, v osrednjem delu okoli 45°, zgornje stene pa so skoraj navpične. Na pobočju je vidnih šest večjih žlebov (erozijskih jarkov) po katerih se odbijajo, kotalijo oz. drsijo razpadle kamnite mase, ki so vidne v vznožju žlebov in pod ogroženo cesto vse do struge reke Drave. Večino kamnite mase tvorijo zdrobljeni kosi do premera 10 cm, posamezni kamniti kosi pa so tudi do premera približno 50 cm.



Slika 4. Pogled na Meljski hrib in detajl zgornjega previsa.

Rezultati analiz so komponente hitrosti in gibanje kamnitega kosa. Izračunano je bilo gibanje okroglega kamnitega kosa z naslednjimi mehanskimi karakteristikami: $m = 1 - 100 \text{ kg}$, $e = 0.3 - 0.5$, $\mu = 0.2 - 0.3$, $\mu' = 0.2 - 0.3$ in $\beta \approx 45^\circ$ ter strižnim kotom pobočja $\varphi = 30^\circ$.

Pričakovane maksimalne vrednosti na mestu zidu so za maso 10 kg:

- Višina odboja $h = <2.0 \text{ m}$
- Translacijska hitrost $v = 30 \text{ m/s}$
- Totalna energija $W = 4500 \text{ J}$

Pri večjih masah prihaja do drsenja in ni visokih odbojev, povečuje pa se energija.

ZAKLJUČEK

Matematični model, ki upošteva analitične rešitve, simulira gibanje padajočega kamenja in vplive geometrijskih in mehanskih karakteristik na rezultate.

Izvedene so bile analize gibanja padajočega kamenja po strmem in deloma previsnem pobočju Meljskega hriba. Rezultati rešitev na ravninskem modelu so primerjani z rezultati profesionalnega programa RockFall. Rezultati se pri izbranih karakteristikah, ki smo jih ocenili kot realne, dobro ujemajo.

Rezultati analize so uporabni pri načrtovanju varovalnih ukrepov na pobočju in v njegovem vznožju (varovanje stavb, cest in drugih objektov). Na vrednost skupne energije vpliva geometrija pobočja, parametri odboja in predvsem velikost kamnitih kosov. Velikost skupne energije je realno omejena, saj pri določeni hitrosti in masi večji kamniti kosi ob trku razpadejo. Za natančnejšo analizo je potrebna dodatna preiskava tal za določitev realnih vrednosti mehanskih karakteristik trka.