

MEJNA ANALIZA S TEOREMOM ZGORNJE VREDNOSTI

LIMIT ANALYSIS – UPPER BOUND THEOREM

Borut Macuh

Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo

Povzetek: V prispevku je predstavljena tehnika mejne analize za določitev porušnih obtežb pri reševanju stabilnostnih problemov v mehaniki tal. Podane so predpostavke in teoremi v mejnih analizah s poudarkom na mejni analizi z metodo zgornje meje. Prikazani so primeri nekaterih rešitev najpogostejših stabilnostnih problemov v mehaniki tal, v katerih je bila uporabljena mejna analiza s teoremom zgornje vrednosti.

Abstract: The paper presents limit analysis technique of failure load determination solving stability problems in soil mechanics. The assumptions and theorems of limit analysis with emphasis on upper-bound limit analysis are given. The solutions using an upper-bound limit analysis on well known stability problem examples in soil mechanics are presented.

1. UVOD

Problemi v mehaniki tal so pogosto deljeni v dve skupini, stabilnostne probleme in deformacijske probleme, ki so obravnavani na dva nepovezana načina. Stabilnostni problemi zajemajo pogoje mejne porušitve zemljinske mase, mednje spadajo problemi določitve zemljinskih tlakov, nosilnost in stabilnost pobočij. Pri takšnih problemih je najpomembneje določiti obtežbo pri kateri bo prišlo do porušitve zemljinske mase. Rešitve teh problemov so pogosto dobljene z uporabo teorije popolne plastičnosti. Deformacijski problemi obravnavajo deformacije in napetosti v zemljini, ko še ne pride do porušitve, mednje spadajo določitev napetosti pod temelji, za zidovi, deformacije okoli predorov in tunelov ter določevanje posedkov. Ti problemi se najpogosteje rešujejo s pomočjo teorije linearne elastičnosti.

Namen prispevka je predstaviti in opisati tehniko mejne analize in njeno uporabo v mehaniki tal, s poudarkom na zgornjih mejnih rešitvah.

Pred detajlnim opisom tehnike mejne analize je potrebno poudariti, da mejna analiza ni edina metoda za določitev porušnih obtežb v reševanju stabilnostnih problemov v mehaniki tal. Preostale standardne in poznane tehnike za reševanje problemov v mehaniki tal so ponavadi uvrščene v dve glavni skupini – metodo porušnih linij in metodo mejnega ravnovesja. Z metodo porušnih linij se poskušajo določiti osnovne diferencialne enačbe, s pomočjo katerih se lahko dobijo rešitve raznih problemov z določitvijo t.i. mreže porušnih linij. Z metodo mejnih ravnovesij pa se poskuša ustvariti poenostavljene porušne mehanizme, s pomočjo katerih se lahko rešujejo razni problemi z enostavno statiko.

V prispevku sta predstavljeni metodi porušnih linij in mejnega ravnovesja, teoremi in predpostavke v metodi mejne analize, tehnika mejne analize po teoremu zgornje vrednosti ter nekaj primerov rešenih s pomočjo mejne analize zgornje vrednosti.

2. METODA PORUŠNIH LINIJ IN METODA MEJNEGA RAVNOVESJA

2.1. *Metoda porušnih linij*

Do plastičnega tečenja zemljine pod temeljem pride, ko je zadosti veliko območje zemljine pod njim obremenjeno do mejnih pogojev zemljine, posledica tega je popolno plastično tečenje zemljine pod temeljem. Ko pride do neomejenega plastičnega tečenja sta v območju

blizu temelja zadovoljena oba pogoja, tako ravnovesni pogoj kot pogoj tečenja. V ravnini v kartezijskem koordinatnem sistemu se pogoja glasita:

Ravnovesna pogoja

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= X(x, y) \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= Y(x, y)\end{aligned}\quad (1)$$

Kriterij tečenja (npr. Coulombov)

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \left(\sigma_x + \sigma_y + \frac{2c}{\tan \varphi} \right)^2 \sin^2 \varphi \quad (2)$$

Pri čemer sta $X(x, y)$ in $Y(x, y)$ komponenti sile teže zemljine, c in φ pa sta kohezija in notranji kot trenja zemljine.

Enačbi ravnovesja in Coulombov pogoj tečenja sestavljata sistem diferencialnih enačb plastičnega ravnovesja za obravnavano območje. Ta sistem diferencialnih enačb lahko skupaj z robnimi napetostnimi pogoji uporabimo za raziskovanje napetosti v zemljini pod temeljem oz. za podpornim zidom v trenutku, ko pride do neomejenega plastičnega tečenja. Za reševanje določenih problemov se te enačbe transformirajo v krivolinijske koordinate katerih smeri sovpadajo v vsaki točki območja tečenja s smermi porušnih ploskev. Te smeri zdrsov so imenovane porušne linije, mreža pa se imenuje polje porušnih ploskev.

Ena od pomanjkljivosti metode porušnih linij je, da ne upošteva odnosa med napetostmi in deformacijami. Rešitev s porušnimi linijami v splošnem predpostavlja, da je v stanju plastičnega ravnovesja samo del zemljinske mase pod temeljem ali za podpornim zidom. Napetostno polje, ki je dobljeno s konstrukcijo polja porušnih linij zadovoljuje napetostne robne pogoje, kateri direktno zadevajo območje, ravnovesne pogoje in pogoje tečenja v vsaki točki območja, imenujemo delno napetostno polje. Razporeditev napetosti zunaj območja tega delnega napetostnega polja ni poznana. Očitno je, da bo veljavnost rešitve potrjena, če bo le ta kazala, da obstaja povezano polje napetosti, ki zadovoljuje pogoj tečenja. Tako razširjeno delno napetostno polje imenujemo razširjeno napetostno polje in definira razporeditev napetosti po celotnem obravnavanem telesu, takšna rešitev pa nam kljub vsemu še ne zagotavlja da daje pravilno rešitev. To pomembno vprašanje o pravilnosti rešitve je lahko popolnoma odgovorjeno v luči teoremov mejne analize. Iz strogih pravil mejne analize bo razvidno, da je razširjeno napetostno polje ravno to kar je zahtevano s pravili spodnje meje mejne analize in tako podaja le spodnjo mejo porušne obtežbe.

2.2. Metoda mejnega ravnovesja

Za določitev približnih rešitev stabilnostnih problemov v mehaniki tal se običajno uporablja t.i. metoda mejnega ravnovesja. V tej metodi se običajno predpostavijo razne potencialne porušne linije enostavnih oblik: ravne, krožne in logaritmične spirale. S tem je obravnavan stabilnostni problem preveden na iskanje najbolj kritične lege porušne ali drsne ploskve izbrane oblike, ki ni nujno dobro osnovana, pogosto pa daje sprejemljive rezultate. V tej metodi je potrebno za zapis ravnovesnih enačb v obliki rezultat napetosti narediti določene predpostavke o razporeditvi napetosti vzdolž porušne ploskve. Tako poenostavljen pristop omogoča reševanje različnih problemov s pomočjo enostavne statike. Čeprav metoda mejnega ravnovesja vsebuje osnove pravil zgornje vrednosti v okviru mejne analize, s tem da je predpostavljena porušna ploskev in nato iskana kritična, ne zadovoljuje natančno zahtev pravil zgornje vrednosti ter tako ne daje zgornje mejne vrednosti. Metoda zadovoljuje

ravnovesne pogoje le delno, ne obravnava pa kinematike zemljine. Nedvomno je, da rešitev dobljena s pomočjo metode mejnega ravnovesja, ne daje spodnje ali zgornje meje vrednosti za dani problem. Očitno pa je, da je kakršnakoli rešitev mejne analize zgornje vrednosti tudi rešitev mejnega ravnovesja.

3. METODA MEJNE ANALIZE

V mehaniki deformabilnega telesa morajo za veljavno rešitev biti izpolnjeni trije osnovni pogoji: ravnovesne enačbe napetosti, konstitutivne zveze med napetostmi in specifičnimi deformacijami ter kompatibilitetne enačbe med specifičnimi deformacijami in pomiki. V elasto plastičnem materialu praviloma pridemo do rešitve v treh fazah (ko je velikost obtežbe postopno povečana od nič), in sicer začetni elastični odziv, srednje plastično tečenje in končno neomejeno plastično tečenje. Določitev popolne rešitve s takšnim pristopom je zelo zamudno, potrebne so posebne metode s katerimi natančneje opisujemo nosilnost materiala glede na obtežbo. S pomočjo mejne analize pa lahko jasno ugotovimo kolikšna je porušna obtežba, ne da bi izvajali iterativno elasto plastično analizo.

V metodi mejne analize je, v nasprotju z metodo porušnih linij in metodo mejnega ravnovesja, odnos napetost-specifična deformacija obravnavan idealizirano s pomočjo normalitetnega pravila ali pravila tečenja, ki vpeljuje mejne teoreme na katerih sloni mejna analiza. Pristop je v okviru te predpostavke strog, same tehnike pa so konkurenčne tehnikam mejnega ravnovesja, v nekaterih primerih celo mnogo enostavnejše.

Pogoji, ki so potrebni za dokaz zgornje ali spodnje mejne vrednosti so v bistvu podani v teoremih spodnje in zgornje vrednosti, ki v teoriji mejne analize omogočata določanje spodnje mejne in zgornje mejne rešitve stabilnostnih problemov za idealno-plastične zemljine.

Teorem spodnje mejne vrednosti

Dejanska porušna obtežba je večja od obtežbe, pri kateri pride do porušitve na statično dopustnem napetostnem polju.

Statično dopustno polje napetosti je ravnovesni sistem z razporeditvijo napetosti, za katerega velja:

- zadovoljuje ravnovesne pogoje v vsaki točki telesa
- zadovoljuje napetostne robne pogoje
- pogoj tečenja ni presežen v nobeni točki telesa

Teorem spodnje mejne vrednosti za idealno plastične materiale z asociativnim modelom tečenja omogoča za vsako statično dopustno napetostno polje oceno spodnje vrednosti dejanske porušne obtežbe obravnavanega problema. Tehnika spodnje mejne vrednosti obravnava samo ravnovesje in tečenje in ne obravnava kinematike zemljine.

Teorem zgornje mejne vrednosti

Dejanska porušna obtežba je manjša od obtežbe, pri kateri pride do porušitve na kinematičnem dopustnem deformacijskem polju z uporabo principa virtualnega dela.

Kinematično dopustno polje deformacij je mehanizem z razporeditvijo pomikov in deformacij, za katero velja:

- polje deformacij je kompatibilno, brez razpok, drsenje enega dela ob drugi je dovoljeno
- zadovoljuje robne pogoje za deformacije
- napetosti zadovoljujejo pogoj tečenja v vseh točkah telesa, ki se deformirajo

Teorem zgornje mejne vrednosti zagotavlja, da je za ravnotežne kinematične sisteme sprememba dela zunanjih sil manjša ali enaka spremembi disipacije notranje energije za vsa kinematično dopustna polja deformacijskih hitrosti. Tehnika zgornje mejne vrednosti

obravnavava samo hitrostne oz. porušne oblike in disipacijo energije, razporeditev napetosti, ki je definirana samo v deformiranih območjih, pa ni nujno v ravnovesju.

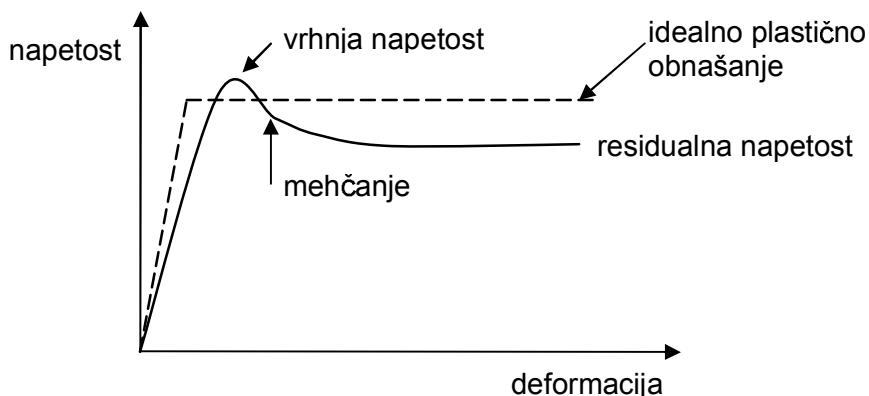
Dejanske vrednosti se nahajajo med obema mejnima vrednostima s pričakovanimi odstopanji, ki so običajno sprejemljiva pri geotehničnem projektiranju.

3.1. *Predpostavke in teoremi v metodi mejne analize*

Osnovni teoremi mejne analize predstavljeni v prejšnjem poglavju dajejo zgornjo in spodnjo mejo za porušno obtežbo. V preteklosti so bile za različne praktične probleme v mehaniki tal določene približne rešitve s sprejemljivimi odstopanji, za nekatere primere pa natančne. S pomočjo mejne analize lahko določimo realno rešitev za porušno obtežbo za kakršnikoli problem, ne glede na njegovo zahtevnost. V nadaljevanju bodo opisane dobro definirane predpostavke na katerih je osnovana racionalna in dosledna metoda mejnih stanj.

Predpostavka elastičnosti-idealne plastičnosti

Na sliki 1 je prikazan tipičen odnos napetost-specifična deformacija za zemljine. Realno obnašanje zemljine (slika 1, prikazano s polno črto) je v začetnem delu linearno elastično, doseže pri neki deformaciji vrhno vrednost napetosti, se nato mehča ter na koncu preide v residualno ali preostalo napetost. V mejni analizi ni upoštevano mehčanje in je odnos idealiziran z bilinearnim diagramom, prvi del predstavlja linearno elastični odnos nato pa preide material pri konstantni napetosti v neomejeno plastično tečenje (slika 1, prikazano s črtkano črto). Takšen material imenujemo idealno plastičen ali popolnoma plastičen material. Vrednost napetosti tečenja, uporabljena v mejni analizi ob predpostavki idealne plastičnosti, je lahko izbrana tako, da predstavlja poprečno napetost v primernem območju deformacij.



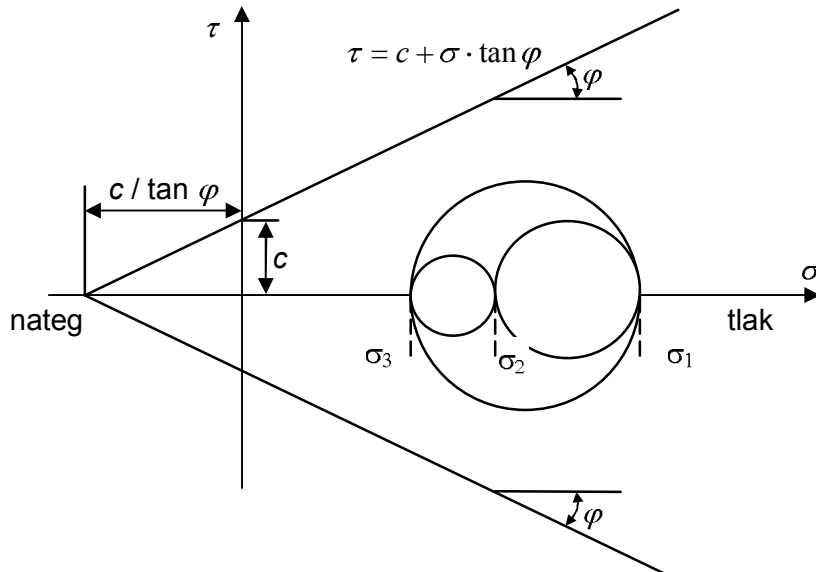
Slika 1: Odnos napetost-specifična deformacija za realne in idealne zemljine

Coulombov kriterij tečenja

Pri reševanju elastoplastičnih problemov moramo poznati obnašanje zemljine za zapletena napetostna stanja. Poznati moramo kakšni pogoji karakterizirajo stanje, ko preide material iz elastičnega stanja v stanje tečenja (horizontalni del črtkane linije na sliki 1). V splošnem pride do plastičnega tečenja na neki ravnini v neki točki zemljine, ko strižna napetost τ doseže vrednost, ki je linearno odvisna od kohezije c in normalne napetosti σ (slika 2), pri čemer mora biti napetost σ tlačna:

$$\tau = c + \sigma \cdot \tan \varphi \quad (3)$$

Zgronjo enačbo je že davnega l. 1773 predlagal Coulomb. Kot φ predstavlja kot notranjega trenja zemljine. Zemljino brez kohezije imenujemo nekoherentna zemljina, zemljino s strižnim kotom notranjega trenja enakim nič pa koherentna zemljina.



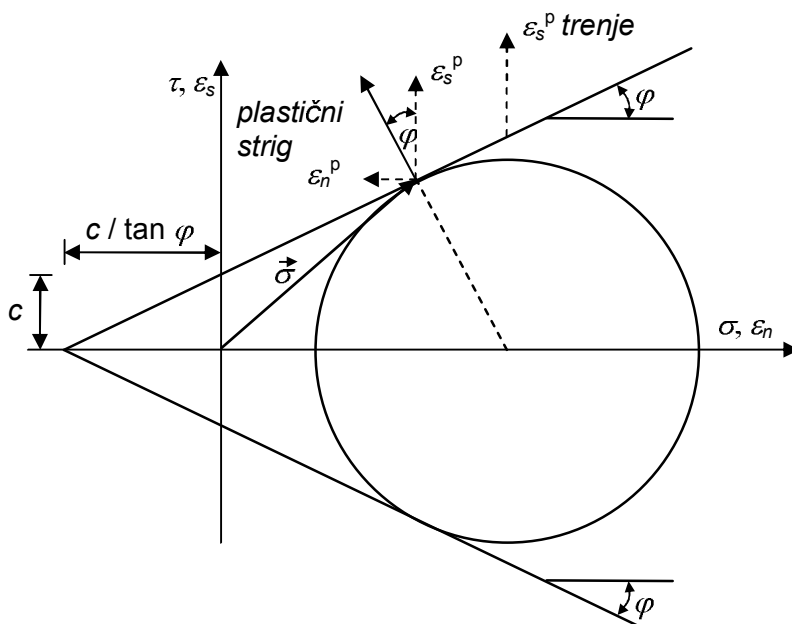
Slika 2: Coulombov kriterij porušitve in Mohrovi krogi napetosti

Funkcija tečenja

Predpostavljeno je, da je plastifikacija vsakega elementa telesa podana s funkcijo tečenja f . Za idealno plastičen material je funkcija tečenja odvisna samo od komponent napetostnega tenzorja $\sigma_{ij} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$. Do plastičnega tečenja lahko pride, ko funkcija tečenja zadovolji naslednjo enačbo:

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \tag{4}$$

Napetostna stanja za katera velja $f(\sigma_{ij}) < 0$ opisujejo elastično obnašanje materiala, medtem ko napetostna stanja $f(\sigma_{ij}) > 0$ niso mogoča. Funkcija tečenja predstavlja v bistvu površino tečenja, ki preide pri preučevanju dveh neodvisnih komponent napetosti v krivuljo tečenja. Nadalje bo predpostavljeno, da je površina tečenja konveksna, kar bo razloženo kasneje.



Slika 3: Mohr-Coulombov kriterij asociativnih idealno plastičnih zemljin

Pravilo tečenja

Znano je, da pride do plastičnega tečenja, ko napetost v točki v prostoru napetosti, predstavljena z vektorjem iz izhodišča doseže površino tečenja. Ker je plastični tok neomejen ne moremo nič reči o skupni plastični specifični deformaciji, zato deformacije predstavimo z njihovimi spremembami:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (5)$$

Elastična komponenta $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ je povezana s $\dot{\sigma}_{ij}$ preko Hookovega zakona. Medtem, ko je plastična komponenta $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ (plastični tok) odvisna od napetostnega stanja s primerno kinematično predpostavko deformacij, ki jo predstavlja pravilo tečenja.

Skladno s konceptom plastične potencialne funkcije - skalarne funkcije napetosti $g(\sigma_{ij})$ – lahko enačbo plastičnega toka zapišemo kot

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

λ je pozitivni skalar proporcionalnosti in je različen od nič le za plastično deformacijo. Izraz (6) vsebuje tudi dejstvo, da je vektor plastičnega toka $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, če je predstavljen kot prosti vektor v napetostnem prostoru, usmerjen v smeri normale na ravnino plastičnega potenciala. Zelo pomemben je najenostavnejši primer, ko funkcija tečenja in funkcija plastična potenciala sovpadata ($f = g$),

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (7)$$

takrat se namreč plastični tok razvije vzdolž normale na površino tečenja. Izraz (7) se imenuje pravilo asociativnega tečenja, ker je plastični tok povezan ali v zvezi s kriterijem tečenja, medtem ko je odnos (6) z $f \neq g$ imenovan pravilo neasociativnega tečenja.

Iz pogoja ireverzibilnosti plastičnih deformacij sledi, da je delo potrošeno v ciklu za plastično deformacijo pozitivno in je enako produktu napetostnega vektorja $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$ in vektorja spremembe specifične deformacije $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ (σ_{ij} je vektor od izhodišča do površine tečenja, σ_{ij}^* je vektor do točke v elastičnem območju):

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (8)$$

Pozitivno plastično delo vodi v konveksnost površine tečenja – produkt (8) je pozitiven le če vektorja, ki tvorita skalarni produkt oklepata ostri kot. Nadalje pozitivno plastično delo vodi v normalnost plastičnega toka (le ta poteka vzdolž normale na površino tečenja).

Coulombov material in pravilo tečenja

Če uporabimo koncept plastičnega potenciala ali pravilo tečenja na Coulombovem materialu, le ta privede do enačbe, iz katere sledi, da je katerikoli plastični deformaciji Coulombovega materiala pridruženo povečanje prostornine, če $\varphi \neq 0$. To lastnost imenujemo dilatacija ali razmik.

Sila, ki povzroči drsenje po neki ploskvi Coulombovega materiala, mora poleg *kohezije* premagati še odpor zaradi dveh vrst trenja. Prvi odpor nastane zaradi povezave med sosednjimi delci in se imenuje *površinsko trenje*. Drugi odpor pa nastane zaradi medsebojnega preprečevanja delcev, da bi spremenili svoj relativni položaj in se imenuje *vezno trenje*.

Na sliki 3 so predstavljene pripadajoče specifične deformacije v prostoru napetosti za Coulombov kriterij tečenja. V točki, ko je dosegel vektor napetosti funkcijo tečenja (Coulombovo premico) je narisana pripadajoči vektor plastične specifične deformacije. Le ta je normalen na krivuljo tečenja, kar je direktna posledica pravila tečenja oz normalitetnega pravila.

Razlika med Coulombovim trenjem in idealno plastičnim Coulombovim mehanizmom je, da torni drsenje deluje v ravnini strižnih sil, medtem ko ima idealno plastičen strig za posledico velik vertikalni premik.

Disipacijska funkcija

Stopnja disipacije energije na enoto volumna za dani vektor spremembe specifične deformacije $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ z dejanskim plastičnim napetostnim stanjem σ_{ij} ima eno samo vrednost:

$$D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) = \sigma_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (9)$$

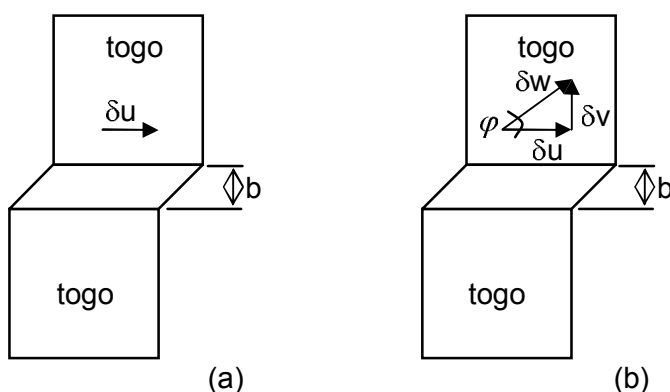
Disipacija energije na enoto površine hitrostne diskontinuitete pa je enaka:

$$d = \sigma'_{ij} \cdot \bar{n}_j \cdot \bar{v}_i = c \cdot v_i \cdot \cos \varphi \quad (10)$$

Ozek prehodni sloj

V teoremih spodnje in zgornje mejne vrednosti lahko uporabimo diskontinuitetna polja napetosti in hitrosti, ki simulirajo ozke prehodne sloje med seboj drsečimi togimi telesi. Prva se uporabljajo pri izpeljavi spodnjih mejnih rešitev, kjer morajo biti izpolnjene ravnovesne enačbe po celotni takšni površini. Pri konstrukciji površin hitrostnih diskontinuitet, ki jih lahko predstavlja drsenje enega togega telesa ob drugem, pa moramo pravilno izračunati disipacijo energije.

Na sliki 4 sta prikazani diskontinuitetni površini za Trescin in Mohr-Coulombov material. Trescin material je poenostavitev Mohr-Coulombovega materiala, s $c = k$ in $\varphi = 0$. Za Trescin material je stopnja disipacije energije enostavna enaka produktu mejne napetosti tečenja pri čistem strigu in tangencialne spremembe hitrosti $D = k \cdot \delta u$ (k je mejna napetost za čisti strig). Za Mohr-Coulombov material pa je stopnja disipacije energije enaka produktu kohezijskega dela strižne napetosti in tangencialne spremembe hitrosti $D = c \cdot \delta u$.



Slika 4: Ozki prehodni sloj: (a) Trescin material, (b) Mohr-Coulombov material

Za Trescin material predstavljata dopustne hitrostne diskontinuitete površina s krožnico in ravna površina. Medtem, ko za Mohr-Coulombov material predstavljata dopustne hitrostne

diskontinuitete le površina logaritmične spirale pod naklonom kota notranjega trenja in ravna površina, ki sta edini dovoljeni površini v mejnih analizah.

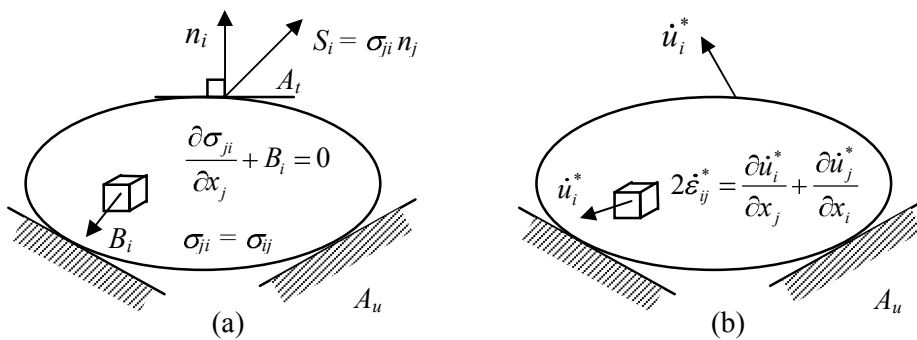
Enačbe virtualnega dela

Dokazi teoremov mejne analize zahtevajo, da so deformacije oz. spremembe geometrije v trenutku porušitve majhne, tako da so vse ravnovesne enačbe zapisane za nedeformirano stanje. S tem lahko uporabimo enačbo virtualnega dela, ki predstavlja ključ za dokaz mejnih teoremov.

Enačbo virtualnega dela sestavljata dva ločena in nepovezana niza: ravnovesni niz in združljiv niz. Kakršnikoli ravnovesni niz (S_i, B_i, σ_{ij}) ali $(\dot{S}_i, \dot{B}_i, \dot{\sigma}_{ij})$ in kakršnikoli združljiv niz $(\dot{u}_i^*, \dot{\varepsilon}_i^*)$ ali $(\dot{u}_i^*, \dot{\varepsilon}_i^*)$ se lahko uporabi za v enačbi virtualnega dela. Ravnovesni niz (S_i, B_i, σ_{ij}) in združljiv niz $(\dot{u}_i^*, \dot{\varepsilon}_i^*)$ dajeta enačbo virtualnega dela (slika 5):

$$\int_A S_i \dot{u}_i^* dA + \int_V B_i \dot{u}_i^* dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV \quad (11)$$

Integracija se izvede po celotni površini A ali prostornini V telesa. S_i oz. B_i predstavljajo zunanje sile na površini oz. sile v telesu, σ_{ij} pa so napetosti v ravnovesju s S_i in B_i .



Slika 5: Neodvisna niza v enačbi virtualnega dela: (a) ravnovesni niz, (b) kompatibilitetni niz

4. METODA MEJNE ANALIZE – TEOREM ZGORNJE VREDNOSTI

Osnovni teoremi mejne analize so osnovani za splošno telo, ki ima naslednje lastnosti:

- material je idealno plastičen - ne pojavi se mehčanje ali utrjevanje
- površina tečenja je konveksna,
- spremembe geometrije telesa ob mejni obtežbi so neznatne

Prva lastnost ima za posledico, da napetostna točka ne more biti izven površine tečenja in, da vektor spremembe napetosti deluje ob spremembi plastične specifične deformacije tangentno na površino tečenja. Druga lastnost pomeni, da so spremembe plastičnih specifičnih deformacij dobljene iz asociativnega pravila tečenja oz. normalitetnega pravila, iz česar sledi $\dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$. Zadnja lastnost omogoča uporabo enačb virtualnega dela.

Drugi teorem (zgornje vrednosti) mejne analize pravi, da so, za kompatibilni mehanizem plastičnih deformacij $(\dot{u}_i^*, \dot{\varepsilon}_i^*)$, ki zadovoljujejo robni pogoj $\dot{u}_i^* = 0$, sile S_i, B_i določene z izenačitvijo spremembe dela zunanjih sil in spremembe disipacije notranje energije večje ali enake dejanski mejni obtežbi:

$$\int_{A_r} S_i \dot{u}_i^* dA + \int_V B_i \dot{u}_i^* dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV \quad (12)$$

Slednja enačba, ki jo dobimo na takšen način, se imenuje delovna enačba za posamezni predpostavljene mehanizem. Dejansko mejno obtežbo dobimo torej z izenačitvijo energij, ki se sprostijo na predpostavljene kinematično dopustnem mehanizmu. Zato imenujemo reševanje problemov v mehaniki tal s pomočjo metode mejne analize na osnovi teorije zgornje vrednosti tudi kinematična ali energijska metoda. Kot veljaven mehanizem je upoštevan vsak mehanizem, ki je na majhnih spremembah deformacij v telesu ali polju hitrosti združljiv ali kinematično dopusten.

4.1. Tehnika mejne analize s teoremom zgornje vrednosti

Skladno s teoremom zgornje vrednosti lahko torej z izenačitvijo spremembe dela zunanij sil s spremembo disipacije notranje energije določimo zgornjo mejno vrednost porušne oz. mejne obtežbe, ki ni na varni strani.

Do rešitve zgornje vrednosti pridemo z izpolnitvijo zagotovitvijo naslednjih korakov:

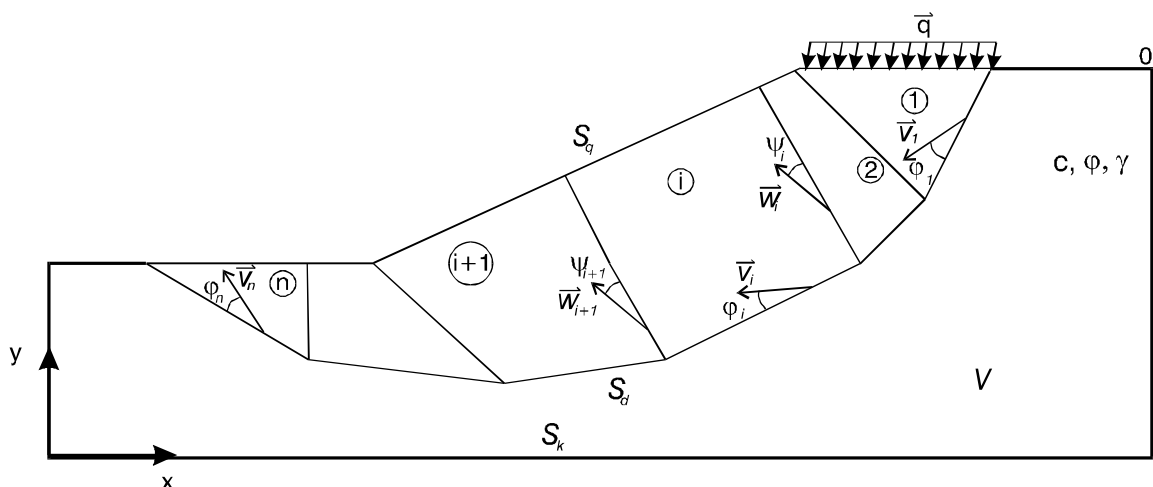
- predpostavimo kinematično dopusten porušni mehanizem,
- izračunamo delo vseh zunanij sil, vključno z delom lastne teže, za majhne deformacije na predpostavljene mehanizmu,
- izračunamo disipacijo notranje energije v hitrostnih diskontinuitetah, ki predstavljajo plastično deformirana območja
- s pomočjo delovne enačbe določimo najbolj kritično oz. najnižjo rešitev zgornje vrednosti za izbrani mehanizem

5. PRIMERI UPORABE MEJNE ANALIZE S TEOREMOM ZGORNJE VREDNOSTI

V tem poglavju bo predstavljena mejna analiza z uporabo teorema zgornje vrednosti na treh klasičnih problemih, ki se pojavljajo v geotehnični praksi: stabilnostne analize pobočij, določevanje zemeljskih tlakov na toge podporne konstrukcije in nosilnost plitvih temeljev. Prikazani bodo kinematično dopustni mehanizmi posameznega problema ter nekaj rezultatov analiz.

5.1. Stabilnostna analiza pobočij

Za stabilnostno analizo pobočij je bila izbrana kinematika porušnega mehanizma, ki je prikazana z diskretizacijo drsnega telesa na sliki 6.

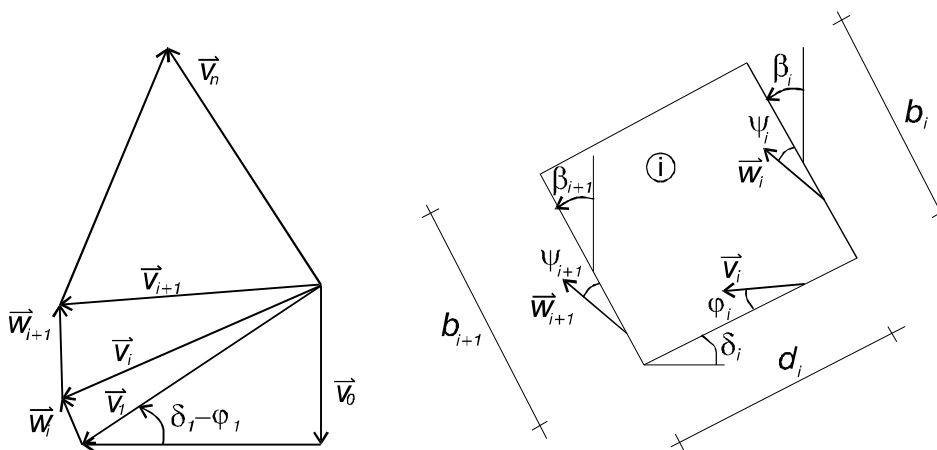


Slika 6: Diskretizirano drsno telo za translatorsni porušni mehanizem

Če izhajamo iz slike 7a, ki predstavlja hodograf za izbrani translatorsni mehanizem, je kinematično dopusten vsak mehanizem, za katerega zavzamejo hitrosti na drsnih ploskvah in medlamelnih ploskvah končno vrednost.

Togi blok je določen z dolžino d_i in naklonom δ_i osnovne ploskve, dolžinama b_i oz. b_{i-1} in naklonoma β_i oz. β_{i-1} medlamelnih ploskev. Prvi blok se lahko pomika navzdol ali navzgor, vendar je razumljiv pomik navzdol. Iz pravila tečenja izhaja, da je naklon hitrosti bloka za kot notranjega trenja φ , nagnjen proti osnovni ploskvi.

Nadaljnji bloki se morajo gibati prav tako s hitrostmi, ki so nagnjene za kot φ proti osnovni ploskvi. Ker se dva sosednja bloka gibljeta s hitrostima, ki sta različno nagnjena, je hitrost medlamelne diskontinuitete razlika njunih hitrosti.



Slika 7: a) Hodograf in b) oznake za translatorsni porušni mehanizem

Iz slike 7a sledi, da je velikost vektorja hitrosti med prvim blokom in drsino enaka:

$$v_0 = v_1 \sin(\delta_1 - \varphi_1), \quad (13)$$

pri čemer je v_0 vertikalna komponenta hitrosti prvega bloka in predstavlja robni pogoj (njena velikost je lahko poljubna, najprimernejša vrednost je ena).

Na osnovi hodografa s slike 7 dobimo relacijo, ki povezuje hitrost i -tega bloka v_i in i -to hitrost w_i med blokoma i in $i-1$ ter relacijo, ki povezuje hitrost $i-1$ -ega v_i in i -tega bloka v_i :

$$w_i = v_i \frac{\sin(\varphi_i - \varphi_{i-1} - \delta_i + \delta_{i-1})}{\cos(\delta_{i-1} - \varphi_{i-1} - \beta_i - \psi_i)} \quad v_i = v_{i-1} \frac{\cos(\delta_{i-1} - \beta_i - \varphi_{i-1} - \psi_i)}{\cos(-\delta_i + \beta_i + \varphi_i + \psi_i)}, \quad (14)$$

kjer predstavlja i številko bloka, δ_i oz. β_i naklon i -tega bloka oz. desne strani i -tega bloka (med blokoma $i-1$ in i), φ_i oz. ψ_i pa notranji strižni kot na osnovi bloka oz. na desni strani i -tega bloka.

Faktor varnosti je v kinematičnih metodah stabilnostnih analiz pobočij definiran kot razmerje med stopnjo disipacije celotnega mehanizma \dot{D} (sil na diskontinuitetah) in stopnjo dela \dot{W} vseh zunanjih sil (teža in ostale sile delujoče na blok) - $F = \dot{D} / \dot{W}$.

Če označimo z G_i težo i -tega bloka, s Q_i rezultanto ostalih delujočih sil na površino bloka, potem je stopnja dela vseh zunanjih sil na celotno število blokov n enaka:

Če vpeljemo v delovno enačbo, ki jo dobimo z izenačitvijo dela zunanjih sil in disipacije notranje energije, mobilizirane vrednosti strižnih parametrov, dobimo enačbo za mejno stanje, iz katere lahko določimo faktor varnosti:

$$F \cdot \sum_{i=1}^n (G_i + Q_i) v_i \sin(\delta_i - \varphi_{mi}) = \sum_{i=1}^n (c_{mi} d_i v_i \cos \varphi_{mi} + e_{mi} b_i w_i \cos \psi_{mi}) \quad (15)$$

V enačbi so c_{mi} , φ_{mi} , d_i mobilizirani kohezija in strižni kot ter dolžina osnovne ploskve i -tega; e_{mi} , ψ_{mi} , b_i mobilizirani kohezija in strižni kot ter dolžina medlamelnih ploskev med blokoma i in $i-1$. Hitrosti v_i in w_i imata pomen kot v enačbah (14).

Tako dobljeni faktor varnosti je neodvisen od robne vrednosti hitrosti v_0 , saj so vse hitrosti homogene funkcije v_0 prvega reda.

Kadar so kohezije enake nič, je sprememba disipacije enaka prav tako nič in iz pogoja (15) tudi stopnja dela zunanjih sil nič. Faktor varnosti določimo iterativno iz zahteve, da je stopnja dela zunanjih sil enaka nič.

Iz enačbe (15) sledijo tudi vse poenostavitve, kot je recimo neupoštevanje kohezije in strižnega kota na medlamelnih ploskvah.

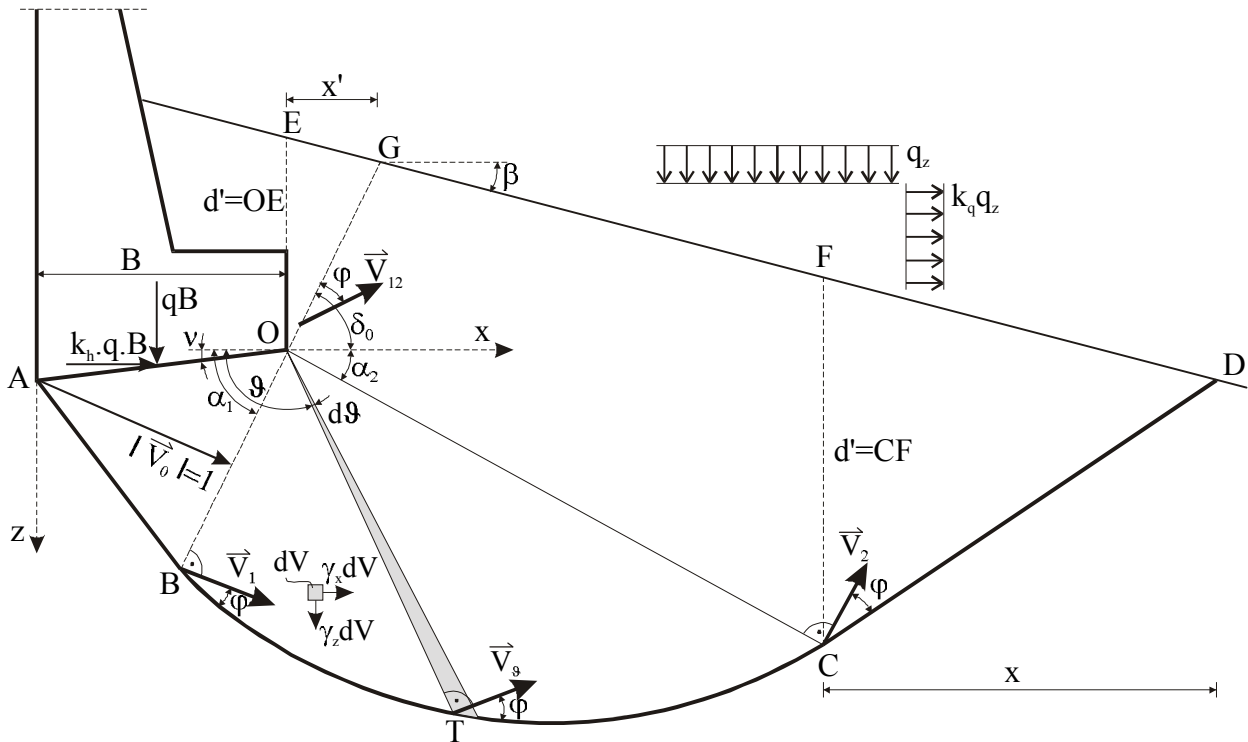
5.2. Nosilnost plitvih temeljev

Določevanje nosilnosti temeljnih tal pod pasovnimi temelji je ena izmed pomembnejših osnovnih nalog v geotehnikih. Z določanjem nosilnosti temeljnih tal pod pasovnimi temelji ležečimi na zemeljskem polprostoru so se ukvarjali mnogi avtorji, vendar ne obstaja mnogo literature, ki bi na tem področju vključevala vpliv nagnjenosti pobočja ob pasovnih temeljih. Med pasovne temelje prištevamo tiste, katerih dolžina je bistveno večja od preostalih dveh dimenzij, tako za njih velja ravninsko deformacijsko stanje. Podan je teoretični model za določitev nosilnosti temeljnih tal pod pasovnimi temelji blizu pobočij, ki vključuje vplive poljubnih obtežb in nagnjeno osnovno ploskev temelja. Za analize je bil izbran modificiran Prandtlov mehanizem porušnega telesa, ki je sestavljen iz klina pod temeljem, logaritmične spirale in se tangentno nadaljuje z ravnim delom do pobočja. Z njim po kinematični metodi z izenačenjem spremembe dela vseh zunanjih sil in spremembe disipacije notranje energije z upoštevanjem kinematično dopustnih pomikov dobimo zgornje mejne vrednosti nosilnosti pasovnih temeljev.

V predstavljeni analizi smo upoštevali naslednje predpostavke:

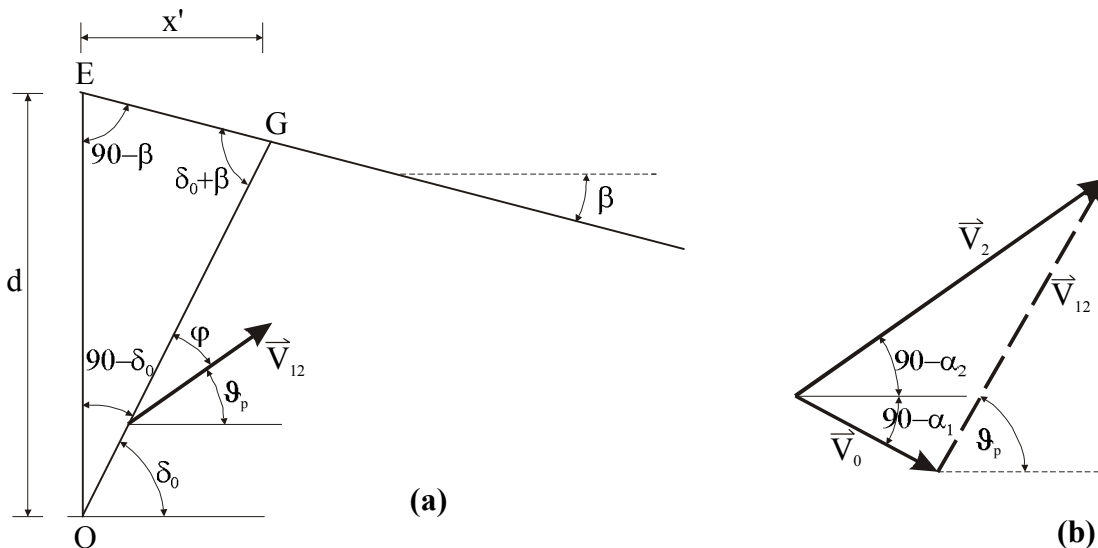
- pasovni temelj je tog
- na mejni ploskvi med temeljem in zemljino ne pride do zdrsa
- zemljina je izotropna, homogena in idealno plastična
- zemljina ustrezajo Mohr-Coulombov kriteriju porušitve z asociativnim pravilom tečenja

Slika 8 prikazuje izbran modificiran Prandtlov porušni mehanizem pod pasovnim temeljem (porušna ploskev ABCD). Masa nad to porušno ploskvijo je sestavljena iz treh togih teles: trikotnika OAB, logaritmične spirale OBC in paralelograma OCDE (oziroma OCDG). Na drsečo maso delujejo poleg volumskih sil mase še vertikalna ($q \cdot B$) in horizontalna ($k_h \cdot q \cdot B$) obtežba centrično na osnovo temelja ter vertikalna (q_z) in horizontalna ($k_q \cdot q_z$) zunanja obtežba na ploskvi DE. V porušnem mehanizmu je predpostavljeno, da ne pride do zdrsa med temeljem in klinom OAB, tako da se oba skupaj togo pomakneta.



Slika 8: Porušni mehanizem z oznakami in poljem hitrosti

Slika 9 prikazuje detajl klina OEG in hodograf hitrosti za določitev hitrosti na diskontinuiteti OG (če je $\varphi + \vartheta_p < 90^\circ$ se na ploskvi OG ustvari pasivni odpor in telo OEG se premakne z enako hitrostjo kot temelj). Smer začetne hitrosti $|\vec{V}_0| = 1$ pasovnega temelja in klina OAB je pravokotna na ploskev OB, zaradi česar ni sprememb disipacije energije v ploskvi OB.



Slika 9: (a) Detajl klina OEG; (b) hodograf za določitev hitrosti na diskontinuiteti OG

K spremembi zunanega dela opravljenega na sistemu prispevajo obtežbe $q \cdot B$, $k_h \cdot q \cdot B$, q_z in $k_q \cdot q_z$ ter lastne teže teles OAB, OBC in OCDE (ali OCDG). Njihove vrednosti se določijo pri

izbrani začetni hitrosti npr. $|V_0| = 1$, skupaj pa predstavljajo celotno spremembo zunanega dela:

$$\sum \Delta W_{ext} = \Delta W_{ext}^q + \Delta W_{ext}^{qz} + \Delta W_{ext}^{OAB} + \Delta W_{ext}^{OBC} + \Delta W_{ext}^{OCDE,OCDE} \quad (16)$$

Sprememba disipacije notranje energije na diskontinuitetah pri začetni hitrosti $|V_0| = 1$ je sestavljena iz spremembe disipacije notranje energije na ploskvah AB, BC, OT, CD in OG (če je izpolnjen pogoj $\pi/2 > \delta_0 > 0$), skupaj pa predstavljajo celotno spremembo disipacije notranje energije:

$$\sum \Delta W_{int} = \Delta W_{int}^{AB} + \Delta W_{int}^{BC,OT} + \Delta W_{int}^{CD} + \Delta W_{int}^{OG} \quad (17)$$

Razdalje R_i in hitrosti na diskontinuitetah ter ostale geometrijske vrednosti so enake:

$$R_0 = \frac{B}{\cos \nu} \quad (18a) \quad \vec{V}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_1 \end{array} \right\} \quad (19a)$$

$$R_1 = \frac{B \cdot \cos(\alpha_1 - \nu - \varphi)}{\cos \nu \cdot \cos \varphi} \quad (18b) \quad \vec{V}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \sin(\pi - \alpha_2) = \sin \alpha_2 \\ \cos(\pi - \alpha_2) = -\cos \alpha_2 \end{array} \right\} \cdot e^{\tan \varphi(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} \quad (19b)$$

$$R_2 = \frac{B \cdot \cos(\alpha_1 - \nu - \varphi)}{\cos \nu \cdot \cos \varphi} \cdot e^{\tan \varphi(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} \quad (18c) \quad \vec{V}_g = \left\{ \begin{array}{l} \sin \mathcal{G} \\ \cos \mathcal{G} \end{array} \right\} \cdot e^{\tan \varphi(\mathcal{G} - \alpha_1)} \quad (19c)$$

$$V_{OAB} = \frac{B^2 \cdot \cos(\alpha_1 - \nu - \varphi) \cdot \sin(\alpha_1 - \nu)}{2 \cdot \cos^2 \nu \cdot \cos \varphi} + \frac{d'^2}{2 \cdot (\tan \beta + \tan \delta_0)} \quad (20)$$

$$x = \frac{d'}{\tan \beta + \tan(\pi/2 - \varphi - \alpha_2)} = \frac{d + R_2(\sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \cdot \tan \beta)}{\tan \beta + \tan(\pi/2 - \varphi - \alpha_2)} \quad (21)$$

$$\tan \mathcal{G}_p = \frac{\sin(\pi/2 - \alpha_1) + e^{\tan \varphi(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} \cdot \sin(\pi/2 - \alpha_1)}{-\cos(\pi/2 - \alpha_1) + e^{\tan \varphi(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} \cdot \cos(\pi/2 - \alpha_1)} \quad (22)$$

$$\delta_0 = \varphi + \mathcal{G}_p = \varphi + \arctan \left[\frac{e^{\tan \varphi(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} \cdot \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1}{e^{\tan \varphi(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} \cdot \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1} \right] \quad (23)$$

V_{OAB} predstavlja prostornino klina OAB, x pa razdaljo označeno na sliki 1.

Če je vrednost kota $\delta_0 > \pi/2$ je potrebno upoštevati delo območja OCDE, katerega prostornina je:

$$V_{OCDE} = \frac{1}{2} [2d + R_2(\sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \cdot \tan \beta)] R_2 \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} \frac{d + R_2(\sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \cdot \tan \beta)}{\tan \beta + \cot(\varphi + \alpha_2)} \quad (24)$$

Če je vrednost kota $0 < \delta_0 < \pi/2$ je potrebno upoštevati delo območja OCDG, katerega prostornina je:

$$\begin{aligned} V_{OCDG} &= V_{OCDE} - \frac{d'}{2[\tan \beta + \tan \delta_0]} \\ &= \frac{\cos \alpha_2}{2} [2d \cdot R_2 + R_2^2(\sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \cdot \tan \beta)] R_2 \cos \alpha_2 + \frac{1}{2[\tan \beta + \cot(\varphi + \alpha_2)]} \\ &\cdot \left[d^2 + 2d \cdot R_2(\sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \cdot \tan \beta) + R_2^2(\sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \cdot \tan \beta)^2 \right] - \frac{d'}{2[\tan \beta + \tan \delta_0]} \end{aligned} \quad (25)$$

Hitrost na diskontinuiteti OG je dobljena s pomočjo hodografa na sliki 2(b):

$$|V_{1,2}| = \sqrt{1 + e^{2 \tan \varphi (\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} + 2e^{\tan \varphi (\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (26)$$

Ko izenačimo celotni spremembi zunanjšega dela (enačba 16) in disipacije notranje energije (enačba 17) dobimo delovno enačbo

$$\sum \Delta W_{ext} = \sum \Delta W_{int} \quad \text{ali} \quad (27a)$$

$$\Delta W_{ext}^q + \Delta W_{ext}^{q_z} + \Delta W_{ext}^{OAB} + \Delta W_{ext}^{OBC} + \Delta W_{ext}^{OCDE, OCDG} = \Delta W_{int}^{AB} + \Delta W_{int}^{BC, OT} + \Delta W_{int}^{CD} + \Delta W_{int}^{OG} \quad (27b)$$

Nosilnost temeljnih tal, ki je povprečna vrednost kritične obtežbe na enoto površine lahko zapišemo:

$$q_{ult} = N \cdot \frac{\gamma_z \cdot B}{2} = \frac{\gamma_z \cdot B}{2} \cdot N \left(k_h = \frac{H}{V}, \frac{d}{B}, c_h = \frac{\gamma_x}{\gamma_z}, k_q = \frac{q_x}{q_z}, \frac{2c}{\gamma_z \cdot B}, \frac{2q_z}{\gamma_z \cdot B} \right) \quad (28)$$

Koeficient nosilnosti N je odvisen od naslednjih znanih razmerij: med horizontalno in vertikalno obtežbo, med globino in širino temelja, med težo na enoto prostornine v horizontalni in vertikalni smeri in horizontalno in vertikalno obtežbo ter kohezijskega $2c/(\gamma_z B)$ in obtežnega razmerja $2q_z/(\gamma_z B)$. Faktor nosilnosti je funkcija dveh neodvisnih spremenljivk, kotov α_1 in α_2 , ki določata geometrijo porušne ploskve ABCD. Ekstremno vrednost $N(\alpha_1, \alpha_2)$ - minimum – dobimo z izpolnitvijo pogojev:

$$\frac{\partial N(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (29a) \quad \frac{\partial N(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (29b)$$

Minimalna vrednost koeficienta nosilnosti N daje zgornjo mejno vrednost za nosilnost pasovnih temeljev. Za določitev optimalne porušne ploskve ABCD je bil izdelan računalniški program, ki vsebuje metode matematičnega programiranja. Izraz za določitev nosilnosti plitvih temeljev je prikazan zaradi izvedenih primerjav, in ima običajno naslednjo obliko:

$$q_{ult} = \frac{1}{2} \gamma_z \cdot B \cdot N_\gamma + \gamma_z \cdot d \cdot N_q + c \cdot N_c \quad (30)$$

kjer so N_γ , N_q in N_c koeficienti nosilnosti.

Primerjave rezultatov so pokazale pravilnost in uporabnost porušnega mehanizma, rezultati dobljeni s prikazanim porušnim mehanizmom pa so v večini primerov dali boljše rezultate kot smo jih do sedaj zasledili v literaturi. S tem se je znižala zgornja vrednost rešitve in pravilna rešitev je še ožje omejena.

5.3. Zemeljski tlaki

Vrednosti zemeljskega tlaka (mirni, aktivni, pasivni) so odvisne od geometrije in slojevitosti pred oziroma za zidom ter od vplivov lastne teže, dodatne obtežbe, kohezije, vodnih tlakov, potresnih vplivov itd.

Obravnavan bo rotacijski porušni mehanizem z logaritmčno spiralo samo za pasivno stanje (slika 10). Kot že rečeno je logaritmčna spirala ena od dveh dopustnih oblik porušnih ploskev, ki zadovoljuje pogoje teorema spodnje vrednosti. V mehanizmu se območje, ki je omejeno z logaritmčno spiralo, zidom in linijo zaledne površine, vrti kot togo telo relativno glede na material pod logaritmčno porušno ploskvijo, imenovano tudi hitrostna diskontinuiteta. Vrti se okoli središča rotacije, ki je popolnoma definirano z dvema spremenljivkama θ_0 in θ_1 . Geometrija zidu in zaledja je podana z dolžino zidu l (merjeno poševno), odklonom zidu λ ter naklon zaledne površine β .

$$r_0^3(f_1 - f_2 - f_3) + P_p r_0 f_4 + cr_0^2 f_5 + qr_0^2 f_6 = cr_0^2 f_7 \quad (34)$$

Rezultanta pasivnih tlakov je enaka torej:

$$P_p = K_{p\gamma} \frac{\mathcal{H}^2}{2} + K_{pq} ql + K_{pc} cl \quad (35)$$

kjer so $K_{p\gamma}$, K_{pq} , in K_{pc} koeficienti pasivnega zemeljskega tlaka zaradi lastne teže zemljine, vertikalne zaledne obtežbe in vpliva kohezije, njihove vrednosti pa so enake:

$$K_{p\gamma} = -\frac{2}{\left(\frac{l}{r_0}\right)^2} \cdot \frac{(f_1 - f_2 - f_3)}{f_4} \quad (36a)$$

$$K_{pq} = -\frac{1}{\frac{l}{r_0}} \cdot \frac{f_6}{f_4} \quad (36b)$$

$$K_{pc} = \frac{1}{\frac{l}{r_0}} \cdot \frac{f_7 - f_5}{f_4} \quad (36c)$$

Za zaledno obtežbo, ki deluje normalno na površino q_0 je potrebno upoštevati naslednji izraz:

$$K_{pq0} = -\frac{1}{\frac{l}{r_0}} \cdot \frac{f_8}{f_4} \quad (36d)$$

Poudariti je potrebno, da so rezultati dobljeni s pomočjo izdelana računalniškega programa potrdili veljavnost izraza teorema korespondenčnih oz. ekvivalentnih stanj (Caquot 1934): koeficient K_{pc} je v soodvisnosti s koeficientom K_{pq0} z naslednjim izrazom:

$$K_{pc} = \frac{K_{pq0} - \frac{1}{\cos \delta}}{\tan \varphi} \quad (37)$$

Hkrati, pa dajeta kritična parametra θ_0 and θ_l dobljena v procesu minimizacije za obe vrednosti K_{pq0} in K_{pc} enako kritično geometrijo.

Primerjave rezultatov so pokazale pravilnost in uporabnost tega enostavnega porušnega mehanizma, še posebej v območjih strižnih karakteristik in geometrijskih parametrov, ki se običajno pojavijo v geotehnični praksi.

6. RAZPRAVA

Za določitev natančne rešitve v mehaniki deformabilnega telesa moramo zadovoljiti ravnovesne enačbe, kompatibilitetne pogoje in konstitutivne odnose za materiale, skupaj s predpisanimi robnimi pogoji. Metode porušnih linij zahtevajo reševanje zahtevnih diferencialnih enačb. Metode mejnega ravnovesja zadovoljujejo ravnovesne pogoje le za del zemljinske mase vzdolž predpostavljenih porušnih linij. Rešitve z mejnimi analizami so stroge, in sicer, da je napetostno polje spodnje mejne rešitve v ravnovesju z obtežbo na mejah zemljinske mase; hitrostno polje zgornje mejne rešitve pa je združljivo s povzročenimi hitrostmi. Medtem, ko vsebuje rešitev spodnje mejne vrednosti ravnovesje, vsebuje rešitev

zgornje mejne vrednosti porušni mehanizem, obe rešitve pa omejujeta dejansko rešitev za mejno obtežbo za podane strižne parametre in geometrijske pogoje.

Mejne analize so malo uporabljene, kljub temu, da so natančne in je potrebno zadovoljiti stroge pogoje. Vzrok za to je težavnost konstruiranja primernih napetostnih polj ter hitrostnih polj. Nadaljnja težava pa je v iskanju optimalnih rešitev, določevanju maksimalnih spodnjih mejnih vrednosti in minimalnih zgornjih mejnih vrednosti, še posebej ob upoštevanju zapletenih geometrijskih pogojev in parametrov zemljin.

V prispevku je detajlno prikazana tehnika mejne analize z upoštevanjem teorema zgornje mejne vrednosti za določevanje mejnih oz. porušnih obtežb pri reševanju stabilnostnih problemov idealno plastičnih materialov.

Predstavljena tehnika mejne analize upošteva teorem zgornje mejne vrednosti, s pomočjo katerega lahko z izenačitvijo spremembe dela zunanjih sil in spremembe disipacije notranje energije na kinematično dopustnem hitrostnem polju dobimo mejno obtežbo, ki predstavlja zgornjo mejo resnične porušne obtežbe. Kinematično dopustno hitrostno polje zadovoljuje asociativno pravilo tečenja, kompatibilitetne pogoje ter robne pogoje za hitrosti.

Z uporabo prikazane metode na glavnih stabilnostnih problemih, sicer z enostavnimi strižnimi parametri in relativno enostavnimi geometrijskimi pogoji, pa je dokazana uporabnost metode mejne analize s teoremom spodnje mejne vrednosti v praktičnih geotehničnih problemih.

Literatura

- [1] Caquot A. *Equilibre des massifs à frottement interne*. Stabilité des terres pulvérulents et cohérents. Gauthier-Villars, Paris, 1934.
- [2] Chang, M.F. and W.F. Chen (1982). *Lateral earth pressures on rigid retaining walls subjected to earthquake forces*. Solid Mechanics Archives, Vol. 7, The Hague, The Netherlands, pp. 315-362.
- [3] Chen, W.F., (1975). *Limit Analysis and Soil Plasticity: Developments in Geotechnical Engineering 7*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- [4] Chen, W.F. and X.L. Liu (1990). *Limit analysis in soil mechanics*, Elsevier, Amsterdam.
- [5] Drescher, A. and Detournay, E. (1993). *Limit load in translational failure mechanism for associate and non-associate materials*. Geotechnique; Vol. 43, No. 3, 443-456.
- [6] Drucker, D.C., Greenberg, H.J. in Prager, W. (1952). *Extended limit design theorems for continuous media*. Q. Appl. Math.; Vol. 9. 381-389.
- [7] Gussmann, P., (1988). *KEM in Geomechanics*. Numerical Method in Geomechanics, Innsbruck 1988, 823-828.
- [8] Karal, K., (1977). *Energy Method for Soil Stability Analyses*, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 103, No. 5, 431-445.
- [9] Kérisel J. and Absi E. *Tables de poussée et de butée des terres*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 3rd edition, 1990, (in French).
- [10] Macuh, B., (1996), *Optimiranje stabilnostnih analiz v geotehnik*, Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo.
- [11] Michalowski, R.L., (1995), *Slope Stability Analysis: A Kinematical Approach*, Géotechnique 45, No. 2, 283-293.
- [12] Saran, S., Sud, V.K., Handa, S.C., (1989). *Bearing Capacity of Footings Adjacent to Slopes*. ASCE Journal of Geotechnical Eng. 115: 553-573.
- [13] Salençon, J. (1990). *An introduction to the yield design theory and its application to soil mechanics*. Eur. J. Mech. Ser. A/Solids. Vol. 9. N°5. 477-500.

- [14] Soubra, A.-H. (2000). *Static and seismic passive earth pressure coefficients on rigid retaining structures*. Canadian Geotechnical Journal, **37**, No. 2, 463-478.
- [15] Soubra, A.H. in Macuh, B. (2001). *Seismic Active and Passive Earth Pressures on Rigid Retaining Structures by a Kinematical Approach*. 4th Int. Confer. on Recent Advances in Geot. Earth. Eng. and Soil Dynamics, Ed. Shamsheer Prakash. San Diego, California. 26-31 March 2001, Paper No.7.10.
- [16] Soubra, A.H. in Macuh, B. (2002). *Active and Passive Earth Pressure Coefficients by a Kinematical Approach*. Proc. Inst. Civ. Eng., Geotechn. Eng. Vol. 155, 2, 119-131.
- [17] Škrabl, S., Macuh, B. (1996a). *Določanje kritičnih porušnih ploskev*, Razprave 2. posvetovanja slovenskih geoteknikov Slovenije, Rogla, oktober 1996, 1. zvezek, 71-76.
- [18] Škrabl, S., Macuh, B. (1996b). *Kinematical Methods of Non-Homogeneous Slopes Stability*, 116th Pannonian Applied Mathematical Meeting, Bulletins for Applied Mathematics, oktober 1996.
- [19] Škrabl, S., Macuh, B., Trauner, L. (1997). *Critical Failure Surface of Homogeneous Soil*, ICES'97, Costa Rica, Advances in computational engineering science, Tech science press, Georgia, USA, 949-955.